

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Cho hàm số

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x.$$

a) Chứng minh rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x < 0$.

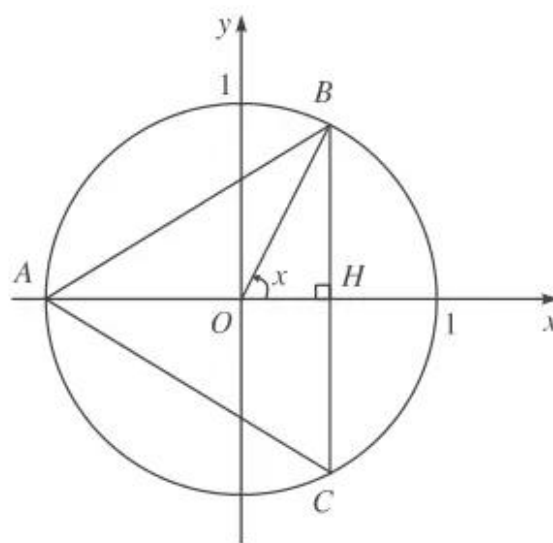
b) Chứng minh bất đẳng thức

$$1 + x < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ với mọi } x < 0.$$

c) Tính giá trị gần đúng của $e^{-0,01}$ với sai số không quá 10^{-4} .

2. Trong mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$

cho tam giác cân ABC đỉnh $A(-1; 0)$, $AB = AC$, nội tiếp trong đường tròn đơn vị, đỉnh B nằm phía trên trục hoành. Gọi x là số đo bằng radian của góc $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$, $0 < x < \pi$. (h.1).



Hình 1

a) Tính diện tích S của tam giác ABC theo x .

b) Với giá trị nào của x , tam giác ABC có diện tích lớn nhất?

3. Cho hàm số $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

a) Chứng minh rằng $f(x) = -x + f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Từ đó suy ra rằng đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \rightarrow -\infty$).

4. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{5}{3}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{G}) của hàm số f .

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của (\mathcal{G}) đi qua điểm $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

c) Chứng minh rằng (\mathcal{G}) nhận điểm $U(-1; -1)$ làm tâm đối xứng.

5. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số f .

b) Từ đồ thị (\mathcal{C}) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số

$$g(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{|x| - 1}.$$

c) Với các giá trị nào của m thì phương trình

$$x^2 - 2|x| = m(|x| - 1)$$

có bốn nghiệm thực phân biệt ?

6. So sánh : $\log_2 3$ và $\sqrt[3]{7}$.

7. Cho ba số $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$ (a, b, c dương và khác 1) lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ba số $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ (x dương và khác 1) theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.

8. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{5^x - 25}$;

b) $y = \log(\sin x + \cos x)$;

c) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_7 \frac{x^2 - 3}{x + 1} \right)}$.

9. Giải các phương trình sau :

a) $1 + 6 \cdot 2^x + 3 \cdot 5^x = 10^x$;

b) $\log_3 3x = 3\sqrt{\log_3 x} - 1$.

10. Giải các bất phương trình sau :

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{1-x} < -\log_2 x$;

b) $0,3^{\frac{\log_1 \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}}{5}} > 1$.

11. Giải các hệ phương trình sau :

a)
$$\begin{cases} 5 \log_2 x - \log_4 y^2 = 8 \\ 5 \log_2 x^2 - \log_4 y = 19 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 64 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3. \end{cases}$$

12. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{1}{3x+5}$;

b) $f(x) = \frac{\cos x}{(5 \sin x + 2)^2}$;

c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$;

d) $f(x) = x^2 \ln x$.

13. a) Tìm các hằng số $A, B, C \in \mathbb{R}$ thoả mãn

$$\frac{2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

b) Áp dụng câu a) hãy tính

$$\int_1^2 \frac{2 dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}.$$

14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng

a) $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx$ với $a > 0$;

b) $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$.

15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2^x$, $y = 3 - x$, trục hoành và trục tung.
16. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục hoành.
17. Chứng minh rằng nếu số phức z không phải là số ảo thì $\frac{z}{z^2 + |z|^2}$ là số thực.

18. Tìm các số phức z, w thoả mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} |z| = |w| = 1 \\ z + w = li \end{cases}$$

trong đó l là số thực cho trước.

19. Biết rằng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của w , hãy tìm các căn bậc hai của các số $-w$, \bar{w} và $i\bar{w}$.
20. a) Tìm các số thực a, b để có phân tích

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = (z - 3)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình sau với ẩn $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0.$$

- b) Tìm các số thực a, b, c để có phân tích

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = (z - ai)(z^2 + bz + c),$$

rồi giải phương trình sau với ẩn $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$$

21. Giải hệ phương trình hai ẩn phức z, w sau :

$$\begin{cases} z + w = 3(1+i) \\ z^3 + w^3 = 9(-1+i). \end{cases}$$

22. Tìm số phức z sao cho $\left| \frac{z+3i}{z+i} \right| = 1$ và $z+1$ có một argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$.

23. Cho số phức $w = \bar{z} \frac{1-3i}{1+2i}$, trong đó $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ($\varphi \in \mathbb{R}$).

a) Hãy viết số phức w dưới dạng lượng giác.

b) Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức w nói trên khi φ thay đổi, $0 \leq \varphi \leq \pi$.