CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Hàm số đơn điệu. Cho hàm số f xác định trên K, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

- f đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó :

- Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.
- Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

1) Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến trên I.
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số nghịch biến trên I.
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên I.

2) Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[a ; b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$.

• Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a\,;\,b)$ thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a\,;\,b)$.

• Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a\,;\,b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng $[a\,;\,b)$.

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Điểm cực trị. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in \mathcal{D}$.

x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a\,;\,b)$ sao cho $x_0 \in (a\,;\,b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a\,;\,b) \setminus \{x_0\}.$$

Điểm cực tiểu của hàm số được định nghĩa tương tự.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

(Hàm số f có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó nó không có đạo hàm).

Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

1) Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a\,;\,b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a\,;\,x_0)$ và $(x_0\,;\,b)$. Khi đó

• Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a\,;\,x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0\,;\,b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

• Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a\,;\,x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0\,;\,b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Chú ý. Không cần xét hàm số f có hay không có đạo hàm tại điểm $x = x_0$.

2) Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a\,;\,b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0. Khi đó :

• Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

• Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

$$M = \max_{x\in\mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \le M \\ \exists x_0 \in \mathcal{D},\ f(x_0) = M. \end{cases}$$

$$m = \min_{x\in\mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \ge m \\ \exists x_0 \in \mathcal{D},\ f(x_0) = m. \end{cases}$$

4. PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(x_0\ ;\ y_0)$.

- Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

- Nếu $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ toạ độ $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ thì phương trình của $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ $(I\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ là

$$Y = f(X + x_0) - y_0.$$

5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thoả mãn :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\ ;\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty\ ;\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty\ ;\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

- Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \ne 0)$ được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Cách tìm tiệm cận xiên : Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

6. SỰ GIAO NHAU VÀ SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

1) Hoành độ giao điểm của hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là nghiệm của phương trình

$$f(x) = g(x).$$

Do đó, số nghiệm phân biệt của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đường cong.

2) • Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gọi là tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ nếu chúng có tiếp tuyến chung tại điểm M. Khi đó, M được gọi là tiếp điểm.

• Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm. Nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ của tiếp điểm.

• Đường thẳng $y = px + q$ là tiếp tuyến của parabol $y = ax^2 + bx + c$ khi và chỉ khi phương trình

$$ax^2 + bx + c = px + q$$

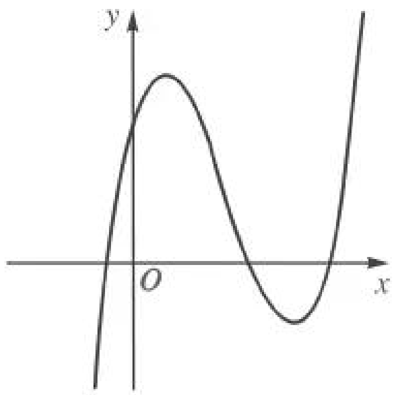
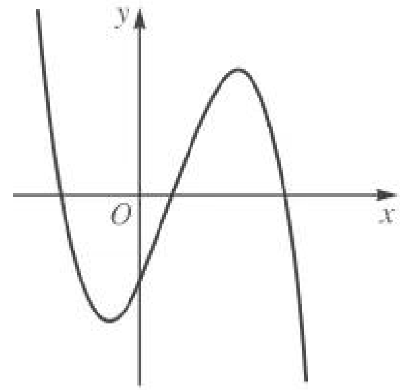
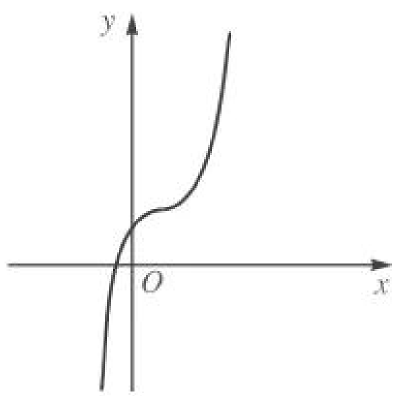
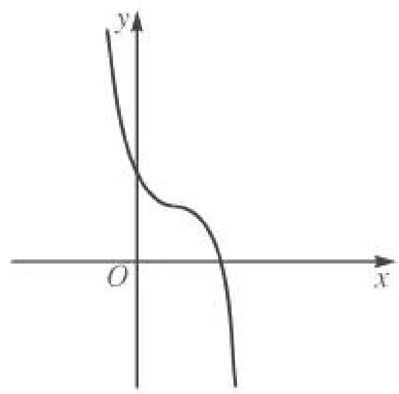
hay

$$ax^2 + (b - p)\,x + c - q = 0$$

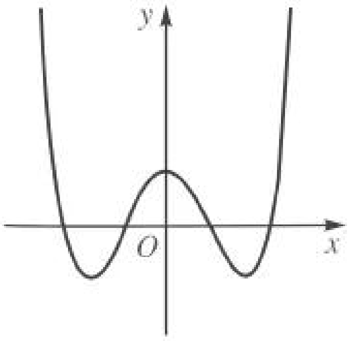
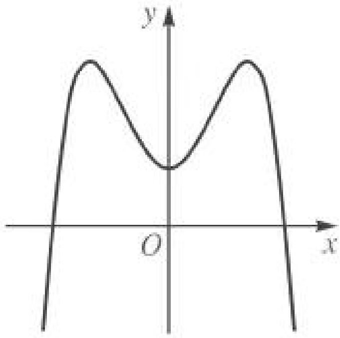
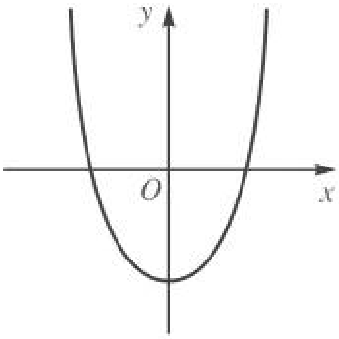
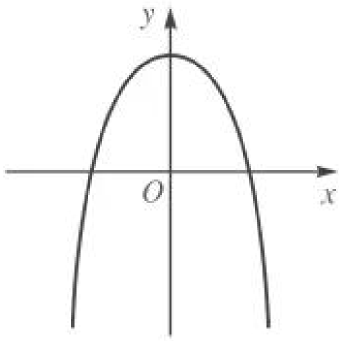
có nghiệm kép.

7. CÁC DẠNG ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

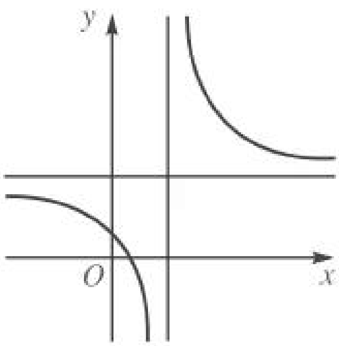
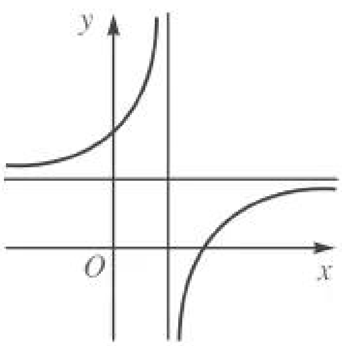
Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có một trong các dạng sau đây

$a > 0$	$a < 0$
 Có 2 điểm cực trị	 Có 2 điểm cực trị
 Luôn đồng biến	 Luôn nghịch biến

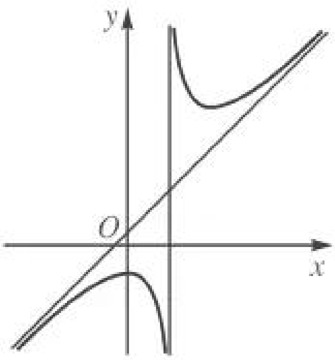
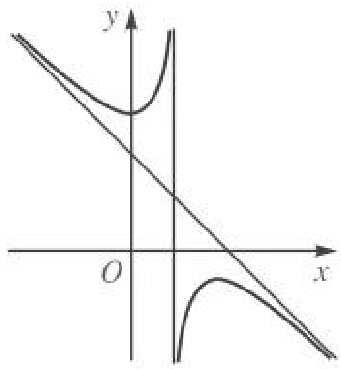
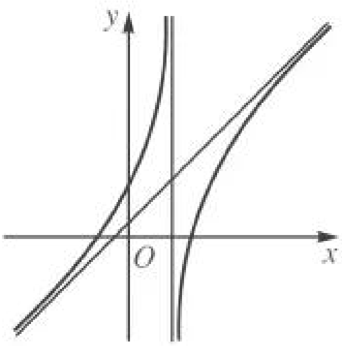
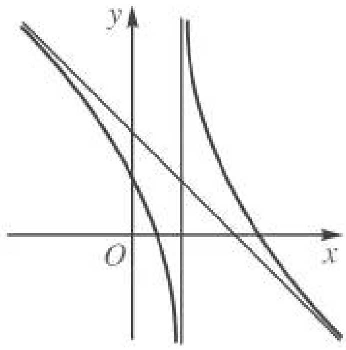
Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có một trong các dạng sau đây.

$a > 0$	$a < 0$
 Có 3 điểm cực trị	 Có 3 điểm cực trị
 Có 1 điểm cực trị	 Có 1 điểm cực trị

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$ có một trong các dạng sau đây

 Luôn nghịch biến	 Luôn đồng biến

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + c'} = px + q + \dfrac{r}{a'x + c'}$ $(a \neq 0,\ a' \neq 0,\ r \neq 0)$ có một trong các dạng sau đây.

 Có cực trị	 Có cực trị
 Luôn đồng biến	 Luôn nghịch biến