CHƯƠNG II HÀM SỐ LUỸ THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA LUỸ THỪA VÀ CĂN

- Với n nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

- Với n nguyên dương lẻ và a là số thực bất kì, chỉ có một căn bậc n của a, kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.

- Với n nguyên dương chẵn và a là số thực dương, có đúng hai căn bậc n của a là hai số đối nhau ; căn có giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$, căn có giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

- Số âm không có căn bậc chẵn.

Số mũ α	Cơ số a	Luỹ thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$\alpha = \dfrac{m}{n} \ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$\alpha = \lim r_n \ (r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. TÍNH CHẤT CỦA LUỸ THỪA

- Giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa.

$$a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \; ; \qquad \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta} \; ; \; (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta} \; ;$$

$$(a.b)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha} \; ; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}.$$

Với $a > 1$, $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Với $0 < a < 1$, $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

3. ĐỊNH NGHĨA LÔGARIT

Với $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$,

$$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

Đặc biệt

$$\log b = \alpha \;\; \Leftrightarrow 10^{\alpha} = b\;;$$

$$\ln b = \alpha \;\; \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\alpha} = b.$$

4. TÍNH CHẤT CỦA LÔGARIT

Giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa.

- $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $a^{\log_a b} = b$; $\log_a a^b = b$.
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

  $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

  $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$.

Đặc biệt : $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$.

• $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c = \log_a c$.

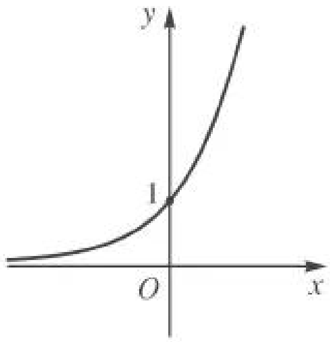
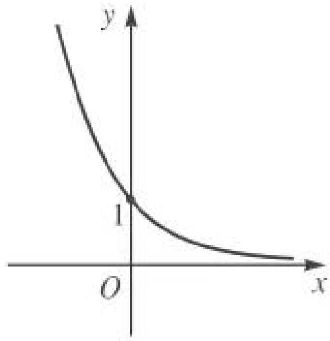
Đặc biệt : $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$.

• Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$.

• Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow 0 < b < c$.

5. HÀM SỐ MŨ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

<table>
<tr><th>$a > 1$</th><th>$0 < a < 1$</th></tr>
<tr>
<td>• $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$
• Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
• $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
• Bảng biến thiên
$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ y = a^x & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$$</td>
<td>• $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$
• Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
• $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
• Bảng biến thiên
$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline & +\infty & & \\ y = a^x & & \searrow & \\ & & & 0 \end{array}$$</td>
</tr>
</table>

• Đồ thị 	• Đồ thị 

6. HÀM SỐ LÔGARIT $y = \log_a x$ ($a > 0$ và $a \neq 1$)

$a > 1$

• $y' > 0$ với mọi $x \in (0\ ;+\infty)$

• Hàm số đồng biến trên $(0\ ;+\infty)$

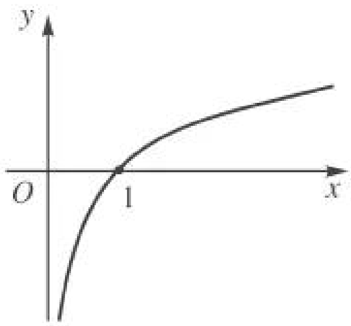
• $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

• Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$y = \log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

• Đồ thị



$0 < a < 1$

• $y' < 0$ với mọi $x \in (0\ ;+\infty)$

• Hàm số nghịch biến trên $(0\ ;+\infty)$

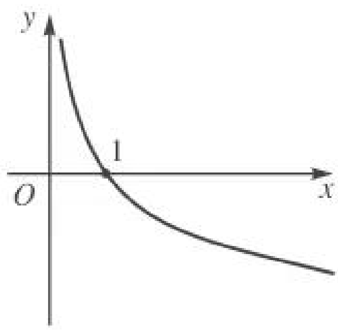
• $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$y = \log_a x$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

• Đồ thị



7. HÀM SỐ LUỸ THỪA $y = x^\alpha$

- Hàm số $y = x^\alpha$ có tập xác định là $(0\ ;\ +\infty)$, trừ các trường hợp sau :

  Nếu α nguyên dương thì hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

  Nếu α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ thì hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}^*$.

- Hàm số $y = x^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ đồng biến trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ khi $\alpha > 0$ và nghịch biến trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ khi $\alpha < 0$.
- Có đồ thị luôn đi qua điểm $(1\ ;\ 1)$.

8. GIỚI HẠN

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0};\ \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\ ; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

9. BẢNG ĐẠO HÀM CẦN NHỚ

$(e^x)' = e^x$	$(e^{u(x)})' = e^{u(x)}.u'(x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^{u(x)})' = a^{u(x)}.u'(x)\ln a$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$	$(\ln\lvert u(x)\rvert)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$(\log_a\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x\ln a}\ (x \neq 0)$	$(\log_a\lvert u(x)\rvert)' = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ (\alpha \neq 0, x > 0)$	$\left((u(x))^\alpha\right)' = \alpha(u(x))^{\alpha-1}.u'(x)$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

10. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

a) $0 < a \neq 1$ $\quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

b) $a > 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$;

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0 \text{ ;}$$

c) $0 < a < 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$;

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$$