B. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

1. Hướng dẫn.

a) $f'(x) = 1 + x - e^x$; $f''(x) = 1 - e^x$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f'(x) < 0$ với mọi $x < 0$.

b) Từ a) suy ra f nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty ; 0]$. Do đó

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x < 0,$$

hay $1 + x + \dfrac{x^2}{2} - e^x > 0$ với mọi $x < 0$.

c) Từ b) suy ra

$$1 - 0{,}01 < e^{-0{,}01} < 1 - 0{,}01 + \frac{0{,}0001}{2}.$$

2. a) $S = \sin x(1 + \cos x)$;

b) $x = \dfrac{\pi}{3}$; $\max S = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. *Hướng dẫn*

a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln[e^{-x}(1 + e^{x})] = -x + \ln(1 + e^{x}) = -x + f(-x).$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim\limits_{x \to -\infty} f(-x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^{x}) = 0$.

4. b) Có hai tiếp tuyến cùng đi qua M là đường thẳng $y = 3x + \dfrac{22}{3}$ và đường thẳng $y = -x - 2$.

5. b) *Hướng dẫn.* g là một hàm số chẵn nên đồ thị $(\mathscr{C}_1)$ của nó đối xứng qua trục tung. Với $x \geq 0$, ta có

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = f(x).$$

Do đó, muốn có đồ thị $(\mathscr{C}_1)$ của hàm số g ta bỏ đi phần của đường cong $(\mathscr{C})$ nằm bên trái trục tung, giữ lại phần của đường cong $(\mathscr{C})$ nằm bên phải trục tung (ứng với các giá trị $x \geq 0$ và $x \neq 1$), và bổ sung thêm hình đối xứng của phần đường cong này qua trục tung.

c) $m > 0$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\frac{x^2 - 2|x|}{|x| - 1} = m.$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của $(\mathscr{C}_1)$ và đường thẳng $y = m$.

6. Do $3^3 < 2^5 \Leftrightarrow 3\log_2 3 < 5 \Leftrightarrow \log_2 3 < \dfrac{5}{3}$; (1)

$5^3 < 189 \Leftrightarrow 5 < 3\sqrt[3]{7} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} < \sqrt[3]{7}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\log_2 3 < \sqrt[3]{7}$.

7. Từ giả thiết $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$ lập thành một cấp số nhân, suy ra $\ln^2 b = \ln a.\ln c$,

$$\frac{\ln x}{\ln a}.\frac{\ln x}{\ln c} = \frac{\ln^2 x}{\ln^2 b}.$$

Dùng công thức đổi cơ số, ta có

$$\log_a x.\log_c x = \log_b^2 x.$$

Từ đó suy ra $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ lập thành một cấp số nhân.

8. a) $x \neq 2$.

b) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ : $\sin x + \cos x > 0$, hay $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

c) $-1 < x < \frac{7-\sqrt{89}}{2}$; $x > \frac{7+\sqrt{89}}{2}$.

Giải. Hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_7 \frac{x^2-3}{x+1}\right)}$ xác định khi

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_7 \frac{x^2-3}{x+1}\right) \geq 0. \qquad (1)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 0 < \log_7 \frac{x^2-3}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{x^2-3}{x+1} \leq 7 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-7x-10}{x+1} \leq 0 \\ \dfrac{x^2-x-4}{x+1} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{7-\sqrt{89}}{2} \quad \text{hoặc} \quad -1 < x \leq \dfrac{7+\sqrt{89}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} < x < -1 \quad \text{hoặc} \quad x > \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7-\sqrt{89}}{2} \text{ hoặc } \frac{1+\sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7+\sqrt{89}}{2}.$$

9. a) $x = 2$.

Hướng dẫn. Chia hai vế của phương trình cho 10^x, ta được

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x + 6.\left(\frac{1}{5}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Vận dụng tính chất nghịch biến của hàm số $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ để chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) $x = 3$; $x = 81$.

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt{\log_3 x} = t$ $(t \geq 0)$ đưa về phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$.

10. a) $0 < x < 1$.

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cùng cơ số 2 (hoặc $\frac{1}{2}$) và sử dụng tính đồng biến (hoặc nghịch biến) của hàm số lôgarit. Chú ý các điều kiện $\frac{x+1}{1-x} > 0$ và $x > 0$.

b) $0 < x < \frac{3}{2}$.

Giải. $0{,}3^{\log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}} > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2} < 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+2} > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x}{x^2+2} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}.$$

11. a) $(x ; y) = (4 ; 4)$.

Hướng dẫn. Đặt $\log_2 x = u$ và $\log_4 y = v$, ta có hệ

$$\begin{cases} 5u - 2v = 8 \\ 10u - v = 19. \end{cases}$$

b) $(x ; y) = (4 ; 1)$.

Hướng dẫn. Lôgarit hoá hai vế của phương trình thứ nhất để đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

rồi đặt $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$ $(u \geq 0, v \geq 0)$ dẫn đến hệ

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 - 6 = 0 \\ u + v = 3. \end{cases}$$

Tìm được $u = 2$; $v = 1$.

12. a) $\frac{1}{3}\ln|3x + 5| + C$.

Hướng dẫn. Đặt $u = 3x + 5$.

b) $-\frac{1}{5(5\sin x + 2)} + C$.

Hướng dẫn. Đặt $u = 5\sin x + 2$.

c) $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$.

Hướng dẫn. Đặt $u = \tan x$.

d) $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = \ln x$ và $v' = x^2$.

13. a) $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$. b) $\ln\frac{32}{27}$.

14. a) *Hướng dẫn*. Đổi biến $u = x^2$.

b) *Giải*. Đổi biến $u = \pi - x$, ta có $du = -dx$ và

$$I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - u)f(\sin u)du$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - u)f(\sin u)du = \pi\int_0^{\pi} f(\sin u)du - I.$$

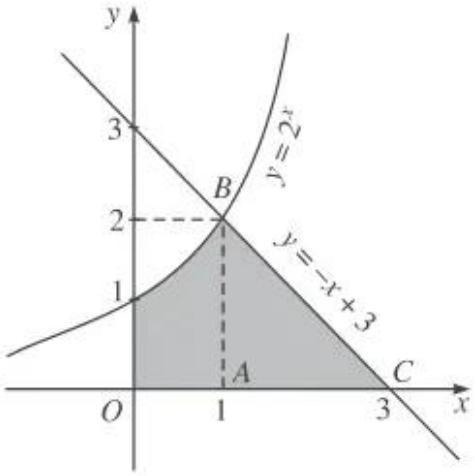
Suy ra $\quad I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

15. $\dfrac{1}{\ln 2} + 2$.

Giải. Dễ thấy phương trình

$$2^x = -x + 3$$

có một nghiệm duy nhất là $x = 1$. Do đó đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm B có hoành độ $x = 1$. Vậy diện tích cần tính (phần tô đậm trong hình 2) là :



Hình 2

$$S = \int_0^1 2^x \mathrm{d}x + S_{ABC} = \frac{1}{\ln 2} + 2.$$

16. $V = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần bằng cách đặt $u = (\ln x)^2$, $v' = 1$. Kết quả là

$$V = \pi\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \pi(x\ln^2 x)\Big|_1^2 - 2\pi\int_1^2 \ln x \mathrm{d}x = 2\pi(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1).$$

17. *Hướng dẫn.* z không phải là số ảo có nghĩa là nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $x \neq 0$. Hãy chứng minh $\dfrac{z}{z^2 + |z|^2} = \dfrac{1}{2x}$.

18. *Giải.* Ta xét các trường hợp sau :

1) $l = 0$. Lúc này dễ thấy z là số phức tuỳ ý sao cho $|z| = 1$, còn $w = -z$.

2) $l \neq 0$. Gọi P, A và B là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức li, z và w. Do $l \neq 0$ nên P khác O. Điều kiện $z + w = li$ tương đương với điều kiện $\overrightarrow{} + \overrightarrow{} = \overrightarrow{}$. Nhưng vì $|z| = |w| = 1$ nên A và B nằm trên đường tròn đơn vị. Vậy A và B là giao điểm của đường tròn đơn vị (O) với đường trung trực (d) của đoạn OP. Từ đó suy ra các kết quả sau :

Khi $0 \neq |l| < 2$ thì (O) và (d) cắt nhau tại hai điểm ứng với hai số phức z và w thoả mãn điều kiện của đề bài. Đó là hai số $\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-l^2}+\frac{l}{2}i$.

Khi $l = 2$ thì (O) và (d) tiếp xúc với nhau tại điểm biểu diễn số phức i. Vậy $z = w = i$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Khi $l = -2$ thì (O) và (d) tiếp xúc với nhau tại điểm biểu diễn số phức $-i$. Vậy $z = w = -i$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Khi $|l| > 2$ thì (O) và (d) không có điểm chung, nghĩa là không có hai số phức z, w nào thoả mãn các điều kiện đã cho.

19. Các căn bậc hai của $-w$, $\overline{w}$ và $i\overline{w}$ theo thứ tự là :

$$\pm iz,\ \pm\overline{z} \text{ và } \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\overline{z}.$$

20. a) $a = 6$, $b = 21$. Các nghiệm là $-3+2\sqrt{3}\,i$; $-3-2\sqrt{3}\,i$; 3.

b) $a = 2$, $b = -2$, $c = 4$. Các nghiệm là $2i$; $1+\sqrt{3}\,i$; $1-\sqrt{3}\,i$.

21. *Hướng dẫn.* Tính $zw = \dfrac{[3(1+i)]^3 - 9(-1+i)}{9(1+i)} = 5i$. Suy ra z, w là các nghiệm của phương trình $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$; phương trình này có biệt thức $\Delta = -2i = (1-i)^2$ nên có các nghiệm là $1 + 2i$ và $2 + i$. Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là

$$(1 + 2i\ ;\ 2 + i) \text{ và } (2 + i\ ;\ 1 + 2i).$$

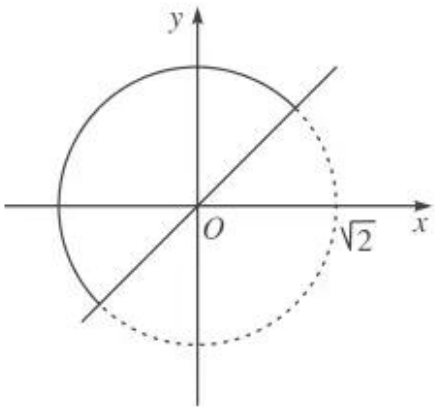
22. *Hướng dẫn.* Điều kiện $\left|\dfrac{z+3i}{z+i}\right| = 1$ nói rằng phần ảo của z bằng -2. Điều kiện $z + 1$ có một acgumen bằng $-\dfrac{\pi}{6}$ nói rằng $z+1 = l(\sqrt{3}-i)$ với $l > 0$. Vậy $z + 1 = 2(\sqrt{3}-i)$, tức là $z = 2\sqrt{3}-1-2i$.

23. *Giải.* a) Ta có $\overline{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$,

$$\frac{1-3i}{1+2i} = -(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Vậy $w = \overline{z}\,\dfrac{1-3i}{1+2i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{4} - \varphi\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4} - \varphi\right)\right]$.

b) Do $0 \le \varphi \le \pi$ nên $\dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{5\pi}{4} - \varphi \le \dfrac{5\pi}{4}$. Vậy tập hợp cần tìm là nửa đường tròn tâm O, bán kính bằng $\sqrt{2}$, nằm phía trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ toạ độ (h.3).



Hình 3