C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

§1. SỐ PHỨC

4.1. a) 1 và 1 ;

b) 0 và 4 ;

c) -16 và 37 ;

d) $\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$ và $\dfrac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2}$;

e) -1 và 0 ;

f) 13 và -32 ;

g) -2^{10} và $2^{10}+1$.

Hướng dẫn. g) Tính tổng cấp số nhân công bội $(1 + i)$.

4.2. a) $x^2 - y^2 - 2x$ và $2(xy - y + 2)$;

b) $\dfrac{-2xy}{x^2+(y+1)^2}$ và $\dfrac{y^2-x^2-1}{x^2+(y+1)^2}$.

4.3. a) $\dfrac{22}{25}+\dfrac{4}{25}i$;

b) $-1+i$, $\dfrac{1}{2}$;

c) $\dfrac{2}{3}+4i$;

d) $0, -1, \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

e) $0, i, -i$;

f) bi $(b \in \mathbb{R})$.

4.4. *Hướng dẫn.* a) $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn $1 + 4i$, $\overrightarrow{AC}$ biểu diễn $2 + 2i$, nên A, B, C không thẳng hàng và trọng tâm G thoả mãn $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ nên G biểu diễn số $\dfrac{1}{3}(6+3i)$.

$\overrightarrow{A'B'}$ biểu diễn $3 - 5i$, $\overrightarrow{A'C'}$ biểu diễn $3 - i$, nên A', B', C' không thẳng hàng và trọng tâm G' thoả mãn $\overrightarrow{OG'}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'})$ nên G' biểu diễn số $2 + i$.

Vậy G trùng G'.

b) $z_1+z_2-z_3$, $z_2+z_3-z_1$, $z_3+z_1-z_2$.

4.5. a) Hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$.

b) Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

c) Đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

d) Đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số phức $1 + \frac{1}{2}i$, bán kính $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

e) Parabol $y = \frac{x^2}{4}$.

f) Hai hypebol $y = \frac{1}{x}$ và $y = -\frac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Với $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ thì :

a) $|z + \overline{z} + 3| = 4 \Leftrightarrow |2x + 3| = 4$.

b) $|z - \overline{z} + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |1 + (2y-1)i| = 2 \Leftrightarrow (2y-1)^2 + 1 = 4$

$$\Leftrightarrow (2y-1)^2 = 3.$$

c) $(2 - z)(i + \overline{z})$ có phần ảo là $-2y - x + 2$.

d) $(2 - z)(i + \overline{z})$ có phần thực là

$$-x^2 - y^2 + 2x + y = -\left[(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right].$$

e) $2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + (y-1)i| = 2|(y+1)i|$

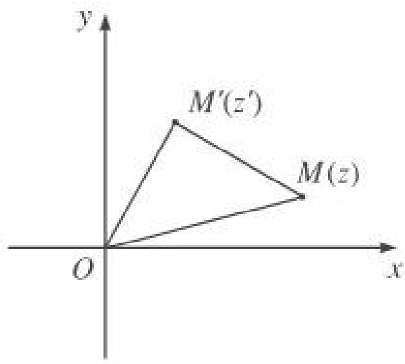
$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$.

f) $|z^2 - (\overline{z})^2| = 4 \Leftrightarrow |4xyi| = 4 \Leftrightarrow |xy| = 1$.

4.6. *Giải*. Ta có $\left|\overrightarrow{OM}\right| = |z|$,

$$\left|\overrightarrow{OM'}\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right||z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|,$$

$$\left|\overrightarrow{MM'}\right| = \left|\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}\right| = \left|\frac{-1+i}{2}\right||z| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|.$$



Hình 4.5

Do $|z| \neq 0$, suy ra tam giác OMM' là tam giác vuông cân đỉnh M' (h.4.5).

4.7. *Giải*. Ta có :

$$z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Rightarrow z_0(z_1 - z_0) = z_1^2 \Rightarrow |z_0||z_1 - z_0| = |z_1|^2.$$

$$z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Rightarrow z_1(z_0 - z_1) = z_0^2 \Rightarrow |z_1||z_1 - z_0| = |z_0|^2.$$

Vậy $|z_1 - z_0| = \dfrac{|z_1|^2}{|z_0|} = \dfrac{|z_0|^2}{|z_1|}$, suy ra $|z_0|^3 = |z_1|^3$.

Do đó $|z_0| = |z_1| = |z_1 - z_0|$ tức là $OA = OB = AB$ (khác 0). Vậy tam giác OAB là tam giác đều.

4.8. *Giải*. a) Viết $z = x + yi,\ z' = x' + y'i\ (x, y, x', y' \in \mathbb{R})$ thì

$$\vec{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy',$$

và $$\bar{z}z' + z\overline{z'} = (x - yi)(x' + y'i) + (x + yi)(x' - y'i) = 2(xx' + yy'),$$

nên $$\vec{u}.\overrightarrow{u'} = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\overline{z'}).$$

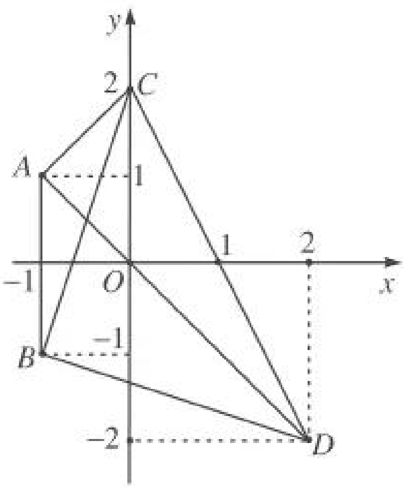
b) $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = 0 \Leftrightarrow \bar{z}z' + z\overline{z'} = 0$, chia cả hai vế cho $z\bar{z} \neq 0$, được

$$\vec{u}.\overrightarrow{u'} = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \frac{\overline{z'}}{\bar{z}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \text{ là số ảo.}$$

c) $\left|z+z'\right|=\left|z-z'\right| \Leftrightarrow (z+z')\left(\overline{z+z'}\right)=(z-z')\left(\overline{z-z'}\right) \Leftrightarrow \overline{z}z'+z\overline{z'}=0$, nên theo câu a) nó tương đương với $\vec{u}.\vec{u'}=0$ (*Chú ý :* khi $\vec{u},\vec{u}'$ không cùng phương, tính chất cuối này tương đương với tính chất : hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật).

4.9. *Giải*. (h.4.6) $\overrightarrow{AC}$ biểu diễn số phức $z_1 = 1+i$, $\overrightarrow{AD}$ biểu diễn số phức $z_2 = 3-3i$.



Hình 4.6

Do $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i}{3-3i} = \dfrac{i}{3}$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=0$ (xem bài tập 4.8).

$\overrightarrow{BC}$ biểu diễn số phức $z_3 = 1+3i$, $\overrightarrow{BD}$ biểu diễn số phức $z_4 = 3-i$.

Do $\dfrac{z_3}{z_4} = \dfrac{1+3i}{3-i} = i$ nên $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=0$ (xem bài tập 4.8).

Vậy CD là một đường kính của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D ; Tâm đường tròn đó là trung điểm của CD nên nó biểu diễn số $\dfrac{2i+(2-2i)}{2}=1$.

4.10. *Giải*. Viết $z = x+yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$ thì

$$\left|\frac{z}{z-i}\right| = \left|\frac{x+yi}{x+(y-1)i}\right| = k \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}=k^2.$$

- Nếu $k=1$ thì đẳng thức cuối này tương đương với $y=\dfrac{1}{2}$. Tập hợp cần tìm là đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ (đường trung trực của đoạn thẳng OI, I biểu diễn số i).

- Nếu $k \neq 1$ thì đẳng thức cuối đó tương đương với

$$x^2+y^2-2\frac{k^2}{k^2-1}y+\frac{k^2}{k^2-1}=0,$$

tức là tương đương với

$$x^2 + \left(y - \frac{k^2}{k^2 - 1}\right)^2 = \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

Tập hợp cần tìm là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số $\frac{k^2}{k^2 - 1}i$, có bán kính bằng $\left|\frac{k}{k^2 - 1}\right|$.

4.11. *Giải.* a) $|z + \alpha|^2 - \alpha\overline{\alpha} = (z + \alpha)(\overline{z} + \overline{\alpha}) - \alpha\overline{\alpha} = z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z}$.

b) $z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + k = 0 \Leftrightarrow |z + \alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha} - k$.

Vậy khi $\alpha\overline{\alpha} - k = R^2 > 0$, tập hợp cần tìm là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số $-\alpha$, có bán kính bằng $R > 0$; khi $k = \alpha\overline{\alpha}$, tập hợp cần tìm chỉ là một điểm (biểu diễn số $-\alpha$) ; khi $k > \alpha\overline{\alpha}$, tập hợp cần tìm là tập rỗng.

4.12. $1 + i$.

Giải. Dễ thấy rằng tập hợp các điểm M của mặt phẳng phức biểu diễn các số z thoả mãn $\left|\frac{z - z_0}{z - z_1}\right| = 1$ (z_0, z_1 là hai số phức phân biệt cho trước) là đường trung trực của đoạn thẳng A_0A_1 (A_0, A_1 theo thứ tự biểu diễn z_0, z_1).

Vậy điều kiện $\left|\frac{z - 1}{z - i}\right| = 1$ chứng tỏ điểm M biểu diễn số z phải nằm trên đường phân giác $y = x$ (viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$). Còn điều kiện $\left|\frac{z - 3i}{z + i}\right| = 1$ chứng tỏ phần ảo của z phải bằng 1. Vậy $z = 1 + i$.

Chú ý. Có thể giải bài toán bằng cách viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ rồi tính toán.

4.13. 0, 1, -1.

Giải. $\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^2 - 1\right]\left[\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^2 + 1\right] = 0.$

Dễ thấy :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = \pm 1 \Leftrightarrow z = 0\ ;$$

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i} - i\right)\left(\frac{z+i}{z-i} + i\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $z = 1$ hoặc $z = -1$.

Vậy các số z cần tìm là 0, 1, -1.