

## B. ĐỀ BÀI

### §1. SỐ PHỨC

4.1. Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau :

a)  $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$  ;                      b)  $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$  ;

c)  $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$  ;                                      d)  $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} - \frac{\sqrt{2} + i}{i}$  ;

e)  $\frac{1}{2i} \left( i^7 - \frac{1}{i^7} \right)$  ;

f)  $\left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i}$  ;

g)  $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20}$  .

4.2. Cho số phức  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức :

a)  $z^2 - 2z + 4i$  ;

b)  $\frac{\bar{z} + i}{iz - 1}$  .

4.3. Tìm nghiệm phức của mỗi phương trình sau :

a)  $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$  ;

b)  $((2-i)\bar{z} + 3+i)\left(iz + \frac{1}{2i}\right) = 0$  ;

c)  $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$  ;

d)  $z^2 + \bar{z} = 0$  ;

e)  $z^2 + |z| = 0$  ;

f)  $z^2 + |z|^2 = 0$ .

4.4. a) Các điểm  $A, B, C$  và  $A', B', C'$  trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$1-i, \quad 2+3i, \quad 3+i \quad \text{và} \quad 3i, \quad 3-2i, \quad 3+2i.$$

Chứng minh rằng hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm.

b) Biết các số phức  $z_1, z_2, z_3$  biểu diễn bởi ba đỉnh nào đó của một hình bình hành trong mặt phẳng phức, hãy tìm số biểu diễn bởi đỉnh còn lại.

4.5. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số  $z$  thoả mãn mỗi điều kiện sau :

a)  $|z + \bar{z} + 3| = 4$  ;

b)  $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$  ;

c)  $(2-z)(i+\bar{z})$  là số thực tùy ý ;

d)  $(2-z)(i+\bar{z})$  là số ảo tùy ý ;

e)  $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$  ;

f)  $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$ .

4.6. Gọi  $M, M'$  theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số  $z \neq 0$  và  $z' = \frac{1+i}{2}z$ . Chứng minh rằng tam giác  $OMM'$  là tam giác vuông cân ( $O$  là gốc toạ độ).

4.7. Cho  $A, B$  là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức  $z_0, z_1$  khác 0 thoả mãn đẳng thức  $z_0^2 + z_1^2 = z_0z_1$ . Chứng minh rằng tam giác  $OAB$  là tam giác đều ( $O$  là gốc toạ độ).

4.8. Các vectơ  $\vec{u}, \vec{u}'$  trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức  $z, z'$ .

a) Chứng minh rằng tích vô hướng  $\vec{u} \cdot \vec{u}'$  thoả mãn

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}')$$

b) Từ câu a) suy ra rằng nếu  $\vec{u} \neq 0$  thì  $\vec{u}, \vec{u}'$  vuông góc khi và chỉ khi  $\frac{z'}{z}$  là số ảo ;

c) Chứng minh rằng  $\vec{u}, \vec{u}'$  vuông góc khi và chỉ khi  $|z + z'| = |z - z'|$ .

**4.9.** Cho  $A, B, C, D$  là bốn điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số

$$-1 + i, \quad -1 - i, \quad 2i, \quad 2 - 2i.$$

Tìm các số  $z_1, z_2, z_3, z_4$  theo thứ tự biểu diễn bởi các vectơ  $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}$ . Tính  $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_3}{z_4}$  và từ đó suy ra  $A, B, C, D$  cùng nằm trên một đường

tròn (xem bài tập 4.8). Tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào ?

**4.10.** Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức  $z$  thoả mãn

$$\left| \frac{z}{z - i} \right| = k,$$

( $k$  là số thực dương cho trước).

**4.11. a)** Cho số phức  $\alpha$ . Chứng minh rằng với mọi số phức  $z$ , ta có

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |z + \alpha|^2 - \alpha\bar{\alpha}.$$

b) Từ câu a) hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số  $z$  thoả mãn

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + k = 0,$$

trong đó  $\alpha$  là số phức cho trước,  $k$  là số thực cho trước.

**4.12.** Tìm số phức  $z$  thoả mãn đồng thời

$$\left| \frac{z - 1}{z - i} \right| = 1 \quad \text{và} \quad \left| \frac{z - 3i}{z + i} \right| = 1.$$

**4.13.** Tìm số phức  $z$  thoả mãn

$$\left( \frac{z + i}{z - i} \right)^4 = 1.$$