C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1.1. $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

1.2. a) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(1\ ;\ 2)$ và $(2\ ;\ +\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(1\ ;\ +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(-1\ ;\ 1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0\ ;\ 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1\ ;\ +\infty)$.

1.3. a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2\ ;\ +\infty)$.

c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ +\infty\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

a) $f'(x) = (x+1)^2(2x-1)$;

b) $f'(x) = 3(x^2+1)(x-2)$;

c) $f'(x) = x^2(3-4x^2)$;

d) $f'(x) = 7x^4(3x-1)^2$.

1.4. *Giải.* a) Hàm số liên tục trên đoạn [1 ; 2] và có đạo hàm

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} < 0 \quad \text{với mọi } x \in (1\ ;\ 2).$$

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn [1 ; 2].

b) Hàm số liên tục trên nửa khoảng [3 ; +∞) và có đạo hàm

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} > 0 \quad \text{với mọi } x \in (3\ ;\ +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng [3 ; +∞).

1.5. *Giải.* c) Vì $y' = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

1.6. *Giải.* Ta có $f'(x) = 1 - \sin 2x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hàm số f liên tục trên mỗi đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1.7. *Giải.* Ta có $y' = 1 - \dfrac{m}{(x-1)^2}$ với mọi $x \neq 1$.

• Nếu $m \leq 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \neq 1$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và $(1\ ;\ +\infty)$.

• Nếu $m > 0$ thì

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 1 - m}{(x-1)^2}.$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{m}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{m}$		1		$1+\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(1 - \sqrt{m}\ ;\ 1)$ và $(1\ ;\ 1 + \sqrt{m})$.

Điều kiện đòi hỏi không được thoả mãn.

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $m \leq 0$.

1.8. *Giải*. Ta có $f'(x) = -x^2 + 4x + 2a + 1$.

$$\Delta' = 2a + 5\ ;\ \Delta' = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}.$$

• Nếu $a = -\frac{5}{2}$ thì $f'(x) = -(x-2)^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ chỉ tại điểm $x = 2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Dễ thấy hàm số f đồng biến trên khoảng $(x_1\ ;x_2)$. Điều kiện đòi hỏi không được thoả mãn.

• Nếu $\Delta' < 0$, tức là $a < -\frac{5}{2}$ thì $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$a \leq -\frac{5}{2}.$$

1.9. a) $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sin^2 a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn

b) Từ a) suy ra rằng f lấy giá trị không đổi trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$f(x) = f(0) = 2 - \sin^2 a - 2\cos^2 a = \sin^2 a \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

1.10. *Giải.* a) Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + \cos x \tan\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= -\sin x + \cos x \tan\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} \\ &= -\sin x + \tan\frac{x}{2}(1 + \cos x) \\ &= -\sin x + \tan\frac{x}{2}.2\cos^2\frac{x}{2} \\ &= -\sin x + \sin x = 0 \text{ với mọi } x \in \left(-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

b) Từ a) suy ra rằng f là một hàm hằng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó $f(x) = f(0) = 1$ với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right)$.

1.11. *Giải.* a) Hàm số xác định và liên tục trên nửa khoảng $[2\,;+\infty)$.

$$f'(x) = 2\left(2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x-2}}\right) = \frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}} > 0 \text{ với mọi } x \in (2\,;+\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[2\,;+\infty)$.

b) Hàm số liên tục trên đoạn $[2\,;3]$, $f(2) = 0$, $f(3) = 18$. Vì $0 < 11 < 18$ nên theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại số thực

$c \in (2 ; 3)$ sao cho $f(c) = 11$. Số thực c là một nghiệm của phương trình đã cho. Vì hàm số f đồng biến trên $[2 ; +\infty)$ nên c là nghiệm duy nhất của phương trình.

1.12. *Giải*. a) Hàm số liên tục trên đoạn $[0 ; \pi]$.

Ta có
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x - \sin x \\ &= \sin x(2\cos x - 1),\ x \in (0 ; \pi). \end{aligned}$$

Vì khi đó $\sin x > 0$ nên

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ và nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$.

b) • Hàm số f liên tục trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}$ và $f(\pi) = -1$. Theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, với mọi $m \in (-1 ; 1) \subset \left(-1 ; \frac{5}{4}\right)$, tồn tại một số thực $c \in \left(\frac{\pi}{3} ; \pi\right)$ sao cho $f(c) = 0$. Số c là nghiệm của phương trình trong b). Vì hàm số f nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ nên trên đoạn này, phương trình có một nghiệm duy nhất.

• Vì với mọi $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$, ta có $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$ nên phương trình đã nêu không có nghiệm với $m \in (-1 ; 1)$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất thuộc $[0 ; \pi]$.

1.13. *Giải.* a) Hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \\ &= \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(1-\cos x)^2(2\cos x + 1)}{\cos^2 x} > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Do đó hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Từ a) suy ra $f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$, tức là ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

1.14. *Giải.* a) Hàm số f liên tục trên nửa khoảng $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Từ a) suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$, tức là

$$\tan x > x \text{ với mọi } x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right).$$

Xét hàm số

$$g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3} \text{ trên nửa khoảng } \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right).$$

Hàm số liên tục trên $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$$

(vì $\tan x > x$ với mọi $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$). Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ và $g(x) > g(0) = 0$ với mọi $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

1.15. *Giải*. a) Hàm số f liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4-\pi}{\pi} - \tan^2 x\,,\ x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

Dễ dàng thấy rằng $0 < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$. Do đó tồn tại một số duy nhất $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ sao cho $\tan\alpha = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

Bảng biến thiên

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0\,;\,\alpha]$ và nghịch biến trên $\left[\alpha\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

b) Theo bảng biến thiên, ta có

$$f(x) \geq 0 \text{ với mọi } x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right].$$

Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.