§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

4.14. a) $\pm(\sqrt{3}+2i)$; b) $\pm(3+\sqrt{5}i)$; c) $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$.

Hướng dẫn. Đưa việc tìm căn bậc hai của số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ về giải hệ phương trình với hai ẩn thực

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

4.15. $y = \dfrac{1}{2x}$.

Giải. Viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì

$$z^2 = a + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Phương trình $2xy = 1$ chứng tỏ điểm M biểu diễn z phải thuộc hypebol $y = \dfrac{1}{2x}$. Vì với mỗi điểm (x, y) của hypebol này, tìm được $a = x^2 - y^2$ nên M vạch nên toàn bộ hai nhánh của hypebol đó.

4.16. a) $i, -i, \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$;

b) $1, -2, \dfrac{-1+\sqrt{23}\,i}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{23}\,i}{2}$.

4.17. a) $a = -4, b = 5$. Các nghiệm là $2 + i, 2 - i, \dfrac{1}{2}$.

b) $a = 2, b = 4$. Các nghiệm là $1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$.

4.18. a) $p^2 - 4q \geq 0, p \leq 0, q \geq 0$;

b) $p^2 - 4q < 0$ hoặc $p^2 - 4q \geq 0, p > 0, q > 0$;

c) $q < 0$ hoặc $q = 0, p > 0$.

4.19. a) $1 + i, \dfrac{-1+i}{2}, 1 - i, -\dfrac{1+i}{2}$;

b) $-3 \pm \sqrt{3}, -1 \pm \sqrt{5}\,i$.

Hướng dẫn. a) $z^4 - z^3 + \dfrac{z^2}{2} + z + 1 = z^2\left[\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^2 - \left(z-\dfrac{1}{z}\right) + \dfrac{5}{2}\right]$.

Phương trình $w^2 - w + \dfrac{5}{2} = 0$ có hai nghiệm là $\dfrac{1+3i}{2}$ và $\dfrac{1-3i}{2}$.

b) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) = (z^2 + 3z + 6 + z)^2 - z^2$.

4.20. $(3 - i ; 1 + 2i)$ và $(1 + 2i ; 3 - i)$.

Hướng dẫn. $z_1z_2 = \dfrac{1}{2}[(4+i)^2 - 5 + 2i] = 5(1+i)$ nên z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0.$$

4.21. $(2-i, -1-3i), (-1-3i, 2-i), (-2+i, 1+3i), (1+3i, -2+i)$.

Hướng dẫn. $(z_1+z_2)^2 = -5+2i+2(-5-5i) = -(15+8i) = (1-4i)^2$, từ đó $z_1 + z_2$ bằng $1-4i$ hoặc bằng $-1+4i$.

4.22. *Hướng dẫn.* a) Tổng các hệ số vế trái phương trình bằng 0.

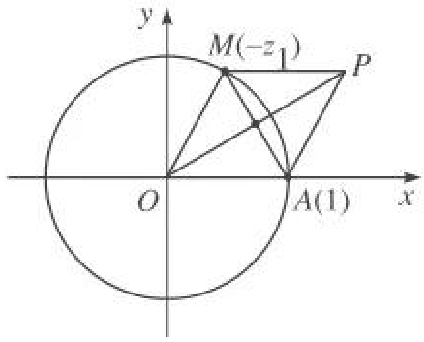
b) $\alpha = -1 - 2i$, $\beta = -1 + i$. Phương trình có ba nghiệm là 1, $1 + i$, i.

4.23. *Giải.* a) Viết $1 - z_1 = z_2 + z_3$.

Nếu $z_1 = 1$ thì $z_2 + z_3 = 0$.

Nếu $z_1 \neq 1$ thì $1 - z_1 \neq 0$, điểm P biểu diễn số $1 + (-z_1) = z_2 + z_3$ không trùng với O nên do $1 = |-z_1| = |z_2| = |z_3|$, đường trung trực của OP cắt đường tròn đơn vị tại hai điểm biểu diễn 1, $-z_1$ và cũng là hai điểm biểu diễn z_2, z_3 (h.4.7). Vậy hoặc $z_2 = 1$, $z_3 = -z_1$ hoặc $z_2 = -z_1$, $z_3 = 1$. Tóm lại hoặc $z_1 = 1$, hoặc $z_2 = 1$ hoặc $z_3 = 1$ (và tổng hai số z còn lại bằng 0).

b) Từ hai phương trình đầu của hệ, theo câu a), có thể coi $z_1 = 1$, $z_2 + z_3 = 0$. Khi đó điều kiện $z_1 z_2 z_3 = 1$ kéo theo hoặc $z_2 = i$, $z_3 = -i$ hoặc $z_2 = -i$, $z_3 = i$. Suy ra hệ có 6 nghiệm do đổi chỗ các phần tử của bộ ba $(1, i, -i)$.



Hình 4.7