§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1.16. a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = 8$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; $f(2) = 7$.

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -2$; $f(-2) = -115$ và $x = 2$; $f(2) = 13$, đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = 20$.

d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; $f(-1) = -7$, đạt cực tiểu tại điểm $x = 5$; $f(5) = 5$.

1.17. a) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$; $f(1) = 5$ và đạt cực đại tại điểm $x = 4$; $f(4) = 2$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$; $f(-2) = -\frac{1}{4}$ và đạt cực đại tại điểm $x = 2$; $f(2) = \frac{1}{4}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$; $f(2) = 2$.

d) *Giải*. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{với } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{với } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{với } x > 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, \quad x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, $f(0) = 2$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = -1$ và $x = 1$; $f(-1) = f(1) = 1$.

1.18. *Giải.* a) $y' = 2\sin x\cos x + \sqrt{3}\sin x$

$$= \sin x(2\cos x + \sqrt{3}).$$

Với $0 < x < \pi$, ta có $\sin x > 0$. Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$1\frac{3}{4}$	$\searrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{5\pi}{6}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1\frac{3}{4}$.

Có thể áp dụng quy tắc 2.

$$y' = \sin 2x + \sqrt{3}\sin x \ ; \ y'' = 2\cos 2x + \sqrt{3}\cos x \ ;$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = 2.\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{5\pi}{6}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1\frac{3}{4}$.

b) $y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$.

Với $0 < x < \pi$, ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}.$$

Ta áp dụng quy tắc 2.

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x \text{ ;}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\pi = 2 > 0.$$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{3} = -3 < 0.$$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$; $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}.$

$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{5\pi}{6} - 4\cos\frac{5\pi}{3} = -3 < 0.$$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{5\pi}{6}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}.$

1.19. $a = 3$; $b = -9$; $c = 2$.

1.20. $p = 1$, $q = 1$.

Giải. Ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{q}{(x+1)^2} \text{ với mọi } x \neq -1.$$

• Nếu $q \leq 0$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq -1$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$. Hàm số không có cực đại, cực tiểu.

• Nếu $q > 0$ thì phương trình

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - q}{(x+1)^2} = 0$$

có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 - \sqrt{q}$ và $x_2 = -1 + \sqrt{q}$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{q}$		-1		$-1+\sqrt{q}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x_1 = -1-\sqrt{q}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x_2 = -1+\sqrt{q}$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$ khi và chỉ khi

$$-1-\sqrt{q} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{q} = 1 \Leftrightarrow q = 1.$$

$f(-2) = -2 \Leftrightarrow p = 1.$