

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

3.10. a) $\frac{(5x+3)^6}{30} + C.$

Hướng dẫn. Đổi biến $u = 5x + 3.$

b) $\frac{\sin^5 x}{5} + C.$

Hướng dẫn. Đổi biến $u = \sin x.$

c) $\ln(e^x + 1) + C.$

Hướng dẫn. Đổi biến $u = e^x + 1.$

3.11. a) $\frac{(4x-1)^4}{16} + C ;$

b) $\frac{(3x+5)^7}{21} + C ;$

c) $\frac{-(7-3x)^9}{27} + C ;$

d) $\frac{-(5x+2)^{-5}}{25} + C ;$

e) $\frac{1}{4(9-4x)} + C.$

3.12. a) $\frac{-1}{96(6x^4+5)^4} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = 6x^4 + 5.$

b) $-\frac{1}{3}\sqrt{(2\cos x - 1)^3} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = 2\cos x - 1.$

c) $\frac{1}{\cos x} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \cos x.$

3.13. a) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + 1.$

b) $\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^3 + 1.$

c) $-\frac{1}{18}(3x^2 + 9)^{-3} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = 3x^2 + 9.$

d) $\ln|x^2 + 4x - 5| + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + 4x - 5.$

3.14. a) $e^{\tan x} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \tan x.$

b) $-\ln(1 + e^{-x}) + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = e^{-x}.$

c) $\ln(\ln x) + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \ln x.$

d) $e^{x^2+4} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + 4.$

3.15. ≈ 264334 con.

Hướng dẫn. $N(t) = 8000\ln(1 + 0,5t) + 250\,000$

$N(10) = 8000\ln 6 + 250\,000 \approx 264334$ (con).

3.16. $\approx 13\text{m/s}.$

Hướng dẫn. $v(t) = 3\ln(t + 1) + 6, v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13(\text{m/s}).$

3.17. $2,66\text{cm}.$

Hướng dẫn. $h(t) = \frac{3}{20}(t + 8)^{\frac{4}{3}} - \frac{12}{5}.$

3.18. a) $-e^{-x}(x + 1) + C.$

Hướng dẫn. $v' = e^{-x}, u = x.$

b) $\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$

Hướng dẫn. $v' = x, u = \ln x.$

c) $\frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C.$

Hướng dẫn. $v' = x^{\frac{1}{2}}, u = \ln x.$

d) $9\sin \frac{x}{3} - 3x\cos \frac{x}{3} + C.$

Hướng dẫn. $v' = \sin \frac{x}{3}, u = x.$

3.19. a) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C.$

Hướng dẫn. $v' = e^x, u = x^2.$

b) $\frac{3}{4}(2x\cos 2x - \sin 2x + 2x^2 \sin 2x) + C.$

Hướng dẫn. $v' = \cos(2x), u = x^2.$

c) $\frac{x^4 \ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$ *Hướng dẫn.* $v' = x^3, u = \ln(2x).$

d) $-\frac{6x \cos(3x) - 2 \sin(3x) + 9x^2 \sin(3x)}{27} + C.$

3.20. Giải.

Ta có : $\int f(x)dx + b \int f(x)dx = aG(x) + C_1$ (C_1 là hằng số nào đó)

hay $(b + 1) \int f(x)dx = aG(x) + C_1.$

Do đó : $\int f(x)dx = \frac{aG(x)}{b + 1} + \frac{C_1}{b + 1} = \frac{aG(x)}{b + 1} + C.$

3.21. a) $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$

Giải. Đặt $u = e^x, v' = \cos x,$ ta dẫn đến

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx. \quad (1)$$

Tương tự

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Từ bài 3.20 suy ra

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

b) $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$

c) $\frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C.$

3.22. a) $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^3, v = -\cos x.$

Ta có $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx.$ Tiếp tục tính $\int x^2 \cos x dx$ bằng cách lấy nguyên hàm từng phần.

$$\text{b) } \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C.$$

Giải. Đổi biến $u = \ln x$. Khi đó $\sin(\ln x) dx = e^u \sin u du$. Ta có (theo bài 3.21b)

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x) dx &= \int e^u \sin u du = \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) + C \\ &= \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C. \end{aligned}$$

3.23. a) *Hướng dẫn.* Kiểm tra rằng $(x^n e^x - n I_{n-1})' = x^n e^x$.

$$\text{b) } I_1 = x e^x - e^x + C; \quad I_2 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C;$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C.$$

3.24. a) *Hướng dẫn.* Kiểm tra rằng $\left(\frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \right)' = \sin^n x$.

$$\text{b) } I_3 = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C.$$