

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

3.10. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau bằng phương pháp đổi biến số :

a) $y = (5x + 3)^5$; b) $y = \sin^4 x \cos x$; c) $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

3.11. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = (4x - 1)^3$; b) $y = (3x + 5)^6$;
c) $y = (7 - 3x)^8$; d) $y = (5x + 2)^{-6}$; e) $y = (9 - 4x)^{-2}$.

3.12. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{x^3}{(6x^4 + 5)^5}$; b) $y = \sin x \sqrt{2 \cos x - 1}$; c) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

3.13. Bằng phương pháp đổi biến số, hãy tìm :

a) $\int 2x \sqrt{x^2 + 1} dx$; b) $\int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$;

$$c) \int \frac{x}{(3x^2 + 9)^4} dx ; \quad d) \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5} dx.$$

3.14. Bằng phương pháp đổi biến số, hãy tìm :

$$a) \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx ; \quad b) \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx ;$$

$$c) \int \frac{1}{x \ln x} dx ; \quad d) \int 2xe^{x^2+4} dx.$$

3.15. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1 + 0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu ?

3.16. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²). Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

3.17. Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

3.18. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, hãy tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

$$a) y = xe^{-x} ; \quad b) y = x \ln x ;$$

$$c) y = \sqrt{x} \ln x ; \quad d) y = x \sin \frac{x}{3}.$$

3.19. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, hãy tìm

$$a) \int x^2 e^x dx ; \quad b) \int 3x^2 \cos(2x) dx ;$$

$$c) \int x^3 \ln(2x) dx ; \quad d) \int x^2 \cos(3x) dx.$$

3.20. Giả sử khi áp dụng công thức nguyên hàm từng phần, ta dẫn đến

$$\int f(x) dx = a G(x) - b \int f(x) dx$$

Với $b \neq -1$.

Chứng minh rằng

$$\int f(x)dx = \frac{aG(x)}{b+1} + C \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

3.21. Sử dụng kết quả bài 3.20 để tìm

a) $\int e^x \cos x dx$; b) $\int e^x \sin x dx$; c) $\int e^x \sin 2x dx$.

3.22. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = x^3 \sin x$; b) $y = \sin(\ln x)$.

3.23. Đặt $I_n = \int x^n e^x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Chứng minh rằng $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$;

b) Tìm I_1, I_2, I_3 .

3.24. Đặt $I_n = \int \sin^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Chứng minh rằng $I_n = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$;

b) Tìm I_3 .