

### §3, §4. LÔGARIT, LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

2.33. a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng ; d) Sai ; e) Sai ; g) Đúng.

2.34. a) 6 ;                    b) -6 ;                    c)  $\frac{14}{3}$  ;                    d) -2.

*Hướng dẫn.* Biến đổi các lôgarit đã cho về dạng  $\log_{a^\alpha} a^\beta$ . Từ đó có

$$\log_{a^\alpha} a^\beta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

2.35. a) 2 ; -1 ;  $\frac{1}{2}$  ;                    b) 2 ; -1 ;  $\frac{1}{3}$  ;

c) 4 ; -2 ;  $\frac{1}{2}$  ;                    d) 3 ; -2 ;  $\frac{1}{2}$ .

2.36. a)  $x < 7$  ;

b)  $x < \frac{1}{2}$  ;

c) Không tồn tại giá trị nào của  $x$  ;    d)  $x < 0$ .

*Hướng dẫn.* Tồn tại  $\log_a A \Leftrightarrow A > 0$  (giả sử đã có  $a > 0, a \neq 1$ ).

2.37. a)  $\frac{1}{3}$  ;

b) 216 ;    c) 25 ;

d) Không tồn tại giá trị nào của  $x$  ;

e) 1 ;    g)  $\frac{1}{49}$ .

*Hướng dẫn.*  $\log_a A = b \Leftrightarrow a^b = A$  với điều kiện  $a > 0 ; a \neq 1$ .

2.38. a)  $\log_4 16$  ;  $\log_4 2$  ;  $\log_4 4$  ;  $\log_4 1$ .

b)  $\log_3 27$  ;  $\log_3 \frac{1}{3}$  ;  $\log_3 \frac{1}{27}$  ;  $\log_3 3$ .

c)  $\log_2 8$  ;  $\log_2 \sqrt{2}$  ;  $\log_2 1$  ;  $\log_2 \frac{1}{2}$ .

d)  $\log_5 5$  ;  $\log_5 \frac{1}{25}$  ;  $\log_5 1$  ;  $\log_5 125$ .

*Hướng dẫn.*  $b = \log_a a^b$ .

2.39. a) 2 ;

b) 5 ;

c) 5 ;

d) 11 ;

e) 15 ;

g) 5 ;

h)  $\frac{2}{7}$  ;

i)  $\frac{1}{2}$  ;

k) 9 ;

l)  $\frac{1}{8}$  ;

m) 81 ;

n) 25.

*Hướng dẫn.*  $a^{\log_a b} = b$ .

2.40. a)  $3a + 2b$  ;

b)  $b + 1$  ;

c)  $2a + b$  ;

d)  $a + b + 1$ .

*Giải.* a)  $\log_5 72 = \log_5(8.9) = \log_5 8 + \log_5 9 = 3\log_5 2 + 2\log_5 3$   
 $= 3a + 2b$ .

2.41. a)  $\frac{2}{5} \log_3 a + \frac{2}{15} \log_3 b$  ;

b)  $\frac{1}{6} \log_3 b - 2 \log_3 a$  ;

c)  $2 + 4 \log_3 a + \frac{1}{5} \log_3 b$  ;

d)  $2 \log_3 b - 7 \log_3 a - 3$ .

*Giải*

b) 
$$A = \left( \frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}} \right)^{-0,2} = a^{10 \cdot (-0,2)} \cdot b^{\left(\frac{-5}{6}\right) \cdot (-0,2)} = a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{6}}.$$

Suy ra  $\log_3 A = \frac{1}{6} \log_3 b - 2 \log_3 a$ .

2.42. a)  $\frac{3}{2}$  ;

b)  $-4$  ;

c)  $\frac{1}{2}$  ;

d)  $-\frac{1}{2}$ .

*Giải.* b)  $2 \log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 400 + 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{45}\right)^3$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{36 \cdot 45}{20} = \log_{\frac{1}{3}} (9 \cdot 9) = \log_{3^{-1}} 3^4 = -\frac{4}{1} = -4.$$

2.43. a)  $19$  ;

b)  $592$  ;

c)  $\frac{45}{2}$ .

*Giải.* c)  $72 \left( 49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log \sqrt{5} 4} \right) = 72 \left( 49^{\log_7 \frac{3}{6}} + 5^{\log_5 4^{-2}} \right)$

$$= 72 \left( \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16} \right) = \frac{72 \cdot 5}{16} = \frac{45}{2}.$$

2.44. a)  $\frac{40}{9}$  ;

b)  $4,86$ .

*Giải.* a)  $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$   
 $= \log_6 2^3 + \log_6 5 - \log_6 3^2 = \log_6 \frac{8.5}{9} = \log_6 \frac{40}{9}.$

Suy ra  $x = \frac{40}{9}.$

2.45. a)  $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{b}}$  ;                      b)  $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[7]{b^4}.$

2.46. a)  $\log_2 10 > \log_5 30$  ;                      b)  $\log_5 3 > \log_{0,3} 2.$

c)  $\log_3 5 > \log_7 4$  ;                      d)  $\log_3 10 > \log_8 57.$

*Giải.* a)  $\log_2 10 > \log_2 8 = 3$  ;     $\log_5 30 < \log_5 125 = 3.$

Suy ra  $\log_2 10 > \log_5 30.$

c)  $\log_3 5 > \log_3 3 = 1 = \log_7 7 > \log_7 4.$

2.47. a)  $-1$  ;                      b)  $1$  ;                      c)  $0$  ;                      d)  $0.$

*Giải.* a)  $\log_2 \left( 2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \cos \frac{\pi}{12} = \log_2 \left( 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right)$   
 $= \log_2 \sin \frac{\pi}{6} = \log_2 \frac{1}{2} = -1.$

2.48. *Giải.* a) Ta có  $\log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}}$  và  $\frac{1}{\left| \log_3 \frac{1}{2} \right|} + \left| \log_3 \frac{1}{2} \right| > 2$

(theo công thức đổi cơ số của lôgarit, bất đẳng thức Cô-si và  $\frac{1}{\left| \log_3 \frac{1}{2} \right|} \neq \left| \log_3 \frac{1}{2} \right|$ ).

Mặt khác,  $\log_3 \frac{1}{2} < 0$  nên  $-\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} - \log_3 \frac{1}{2} > 2$ , hay

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2.$$

$$b) 4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4} \Leftrightarrow \log_4 4^{\log_5 7} = \log_4 7^{\log_5 4} \Leftrightarrow \log_5 7 = \log_5 4 \cdot \log_4 7.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng suy ra đẳng thức đầu tiên đúng.

$$c) \text{ Ta có } \log_3 7 > 0, \log_7 3 > 0 \text{ và } \log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} \neq \log_7 3. \text{ Theo bất đẳng}$$

thức Cô-si, ta có

$$\frac{1}{\log_7 3} + \log_7 3 > 2, \text{ suy ra } \log_3 7 + \log_7 3 > 2.$$

$$d) 3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_3 3^{\log_2 5} = \log_3 5^{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng, suy ra đẳng thức đầu tiên đúng.

$$2.49. \bullet x = 1 \Rightarrow \log_{abc} x = 0 ;$$

$$\bullet x \neq 1 \Rightarrow \log_{abc} x = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}.$$

$$\text{Hướng dẫn. } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

$$2.50. \text{ a) } \frac{ab+1}{a(8-5b)} ; \quad \text{ b) } \frac{5-b}{2a+2ab-4b+2}.$$

Hướng dẫn

$$\text{a) } \log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 (3 \cdot 7 \cdot 8)}{\log_7 (2 \cdot 3^3)} = \frac{\log_7 3 + 1 + 3 \log_7 2}{\log_7 2 + 3 \log_7 3}.$$

Như vậy, để tính được  $\log_{54} 168$  qua  $a, b$  ta cần tính được  $\log_7 3, \log_7 2$  qua  $a, b$ .

Từ giả thiết  $a = \log_7 12, b = \log_{12} 24$ , ta tính được  $\log_7 2, \log_7 3$  từ hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 \log_7 2 + \log_7 3 = a \\ 3 \log_7 2 + \log_7 3 = ab. \end{cases}$$

$$b) \log_{25} 24 = \frac{1}{2} \log_5 24 = \frac{3}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 3.$$

Ta cần tính  $\log_5 2$  và  $\log_5 3$  theo  $a = \log_6 15$  và  $b = \log_{12} 18$ .

$$\text{Ta có } a = \log_6 15 = \frac{\log_5 15}{\log_5 6} = \frac{1 + \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } b = \log_{12} 18 = \frac{\log_5 18}{\log_5 12} = \frac{\log_5 2 + 2 \log_5 3}{2 \log_5 2 + \log_5 3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta tính được  $\log_5 2$  và  $\log_5 3$  theo  $a$  và  $b$ .

**2.51.** -6.

$$\begin{aligned} \text{Giải. } A &= \log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 (4x^4) = 2 \log_4 |x| - 1 - 2(1 + 4 \log_4 |x|) \\ &= -3 - 6 \log_4 |x| = -3 - 3 \log_2 |x|. \end{aligned}$$

Khi  $x = -2$  thì  $A = -3 - 3 \log_2 2 = -6$ .

**2.52. Hướng dẫn.** Áp dụng định lí Py-ta-go  $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$  và

$$\text{lưu ý rằng } \log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\beta \alpha}.$$

**2.53. Giải.** a)  $a^{\log b} = b^{\log a} \Leftrightarrow \log a^{\log b} = \log b^{\log a}$

$$\Leftrightarrow \log b \cdot \log a = \log a \cdot \log b.$$

Đẳng thức cuối đúng suy ra đẳng thức đầu cũng đúng.

b) Làm tương tự.

**2.54.** a) 0 ;      b) 0 ;      c)  $-\frac{1}{2}$  ;      d) 5.

**2.55.** a)  $2 \ln^2 a + 2$  ;      b) 0.

$$\text{Hướng dẫn. Sử dụng } \log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\beta \alpha}.$$

2.56. a) 1 ;            b) 1 ;            c) 2.

*Hướng dẫn.* a) Đưa về lôgarit cơ số 3.

2.57.  $2\ln e^3 < 8 - \ln \frac{1}{e}$ .

2.58. a)  $\approx 1,024$  ;    b)  $\approx 0,693$ .

*Giải*

a)  $\log_{81} 90 = \frac{\log 90}{\log 81} = \frac{1 + 2 \log 3}{4 \log 3} \approx \frac{1 + 2 \cdot 0,4771}{4 \cdot 0,4771} \approx 1,024$ .

b)  $\ln 2 = \ln 10 \cdot \log 2 \approx 2,3026 \cdot 0,3010 \approx 0,693$ .

2.59. a)  $\frac{\sqrt{5a} \cdot c^4}{b^3}$  ;    b)  $\frac{m^5 \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$ .

2.60. 227824.

*Hướng dẫn.*

$$\begin{aligned} p + 1 = 2^{756839} &\Rightarrow \log(p + 1) = 756839 \cdot \log 2 \approx 227823,68 \\ &\Rightarrow p + 1 \approx 10^{227823,68} \Rightarrow 10^{227823} < p + 1 < 10^{227824} \end{aligned}$$

2.61.  $4\ln 2$  ;  $9\ln 2$  ;  $-3\ln 2$  ;  $\frac{1}{2}\ln 2$  ;  $3\ln 2$ .

2.62.  $2a + 2b$  ;  $-2a - b$  ;  $2b - 2a$  ;  $11a + b$ .

*Giải.* Tính biểu thức cuối

$$\begin{aligned} \ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0,875) &= \ln 3 + \ln 7 + 2\ln 2 + 2\ln 7 - 3\ln(7 \cdot 0,5^3) \\ &= \ln 3 + 2\ln 2 - 3\ln 2^{-3} \\ &= 11\ln 2 + \ln 3 = 11a + b. \end{aligned}$$

**2.63. Giải**

$$\begin{aligned}\log_{15} 30 &= 1 + \log_{15} 2 = 1 + \frac{\log 2}{\log 3 + \log 5} \\ &= \frac{\log 3 + \log 5 + \log 2}{\log 3 + \log 5} \\ &= \frac{\log 3 + \log 10}{\log 3 + \log 5} = \frac{1 + p}{p + q}.\end{aligned}$$

**2.64.**  $\approx 530,23\text{mmHg}$ .

*Hướng dẫn.* Trước tiên tìm  $i$  từ đẳng thức

$$672,71 = 760.e^{1000.i} \quad (i \approx -0,00012).$$

Từ đó  $p \approx 760.e^{3000.(-0,00012)}$ .

**2.65.** a) Năm 2051 ;

b) Khoảng 25 năm.