

### §3, §4. LÔGARIT, LÔGARIT THẬP PHẦN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

2.33. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng, đẳng thức nào sai ?

a)  $\log_{\pi} 1 = 0$  ;

b)  $\log_3 \frac{1}{81} = 4$  ;

c)  $\log_4 16 = 2$  ;

d)  $\log_5 \frac{1}{125^{-1}} = -3$  ;

e)  $\log_{\frac{1}{3}} 9 = 2$  ;

g)  $\log_{0,5} 4 = -2$ .

2.34. Hãy tính

a)  $\log_{\sqrt{2}} 8$  ;

b)  $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27$  ;

c)  $\log_{2\sqrt{2}} 128$  ;

d)  $\log_{\sqrt{5}} 0,2$ .

2.35. Hãy tìm lôgarit của các số sau theo cơ số  $a$  :

a)  $25$  ;  $\frac{1}{5}$  ;  $\sqrt{5}$  với  $a = 5$  ;

b)  $64$  ;  $\frac{1}{8}$  ;  $2$  với  $a = 8$  ;

c)  $16$  ;  $\frac{1}{4}$  ;  $\sqrt{2}$  với  $a = 2$  ;

d)  $27$  ;  $\frac{1}{9}$  ;  $\sqrt{3}$  với  $a = 3$ .

2.36. Với giá trị nào của  $x$  thì mỗi biểu thức sau đây xác định ?

a)  $\log_{0,2}(7 - x)$  ;

b)  $\log_6 \frac{1}{1 - 2x}$  ;

c)  $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$  ;

d)  $\log_{0,7}(-2x^3)$ .

2.37. Tìm  $x$ , biết :

a)  $\log_3 x = -1$  ;

b)  $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$  ;

c)  $\log_5 x = 2$  ;

d)  $\log_{\frac{1}{x}} x = 1$  ;

e)  $\log_{\sqrt{5}} x = 0$  ;

g)  $\log_7 x = -2$ .

**2.38.** Viết mỗi số sau dưới dạng lôgarit cơ số  $a$

a)  $2; \frac{1}{2}; 1; 0$  với  $a = 4$ ;      b)  $3; -1; -3; 1$  với  $a = 3$ ;

c)  $3; \frac{1}{2}; 0; -1$  với  $a = 2$ ;      d)  $1; -2; 0; 3$  với  $a = 5$ .

**2.39.** Hãy sử dụng tính chất của lôgarit để đơn giản biểu thức

a)  $2,3^{\log_{2,3} 2}$ ;      b)  $\pi^{\log_{\pi} 5}$ ;      c)  $2^{\log_2 5}$ ;      d)  $3,8^{\log_{3,8} 11}$ ;

e)  $5^{1+\log_5 3}$ ;      g)  $10^{1-\lg 2}$ ;      h)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_1 2}$ ;      i)  $3^{2-\log_3 18}$ ;

k)  $4^{2\log_4 3}$ ;      l)  $5^{3\log_5 \frac{1}{2}}$ ;      m)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_1 3}$ ;      n)  $6^{2\log_6 5}$ .

**2.40.** Biết rằng  $\log_5 2 = a$  và  $\log_5 3 = b$ . Hãy tính các lôgarit sau theo  $a$  và  $b$ :

a)  $\log_5 72$ ;      b)  $\log_5 15$ ;

c)  $\log_5 12$ ;      d)  $\log_5 30$ .

**2.41.** Lấy lôgarit theo cơ số 3 của mỗi biểu thức sau đây ( $a > 0, b > 0$ ), rồi viết dưới dạng tổng hoặc hiệu các lôgarit:

a)  $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$ ;      b)  $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}$ ;

c)  $9a^4 \sqrt[5]{b}$ ;      d)  $\frac{b^2}{27a^7}$ .

*Tính giá trị các biểu thức (bài 2.42 và 2.43).*

**2.42.** a)  $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$ ;      b)  $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$ .

c)  $\log_{36} 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$ ;      d)  $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$ .

$$2.43. a) \left( 81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} \right) \cdot 49^{\log_7 2} ;$$

$$b) 16^{1 + \log_4 5} + 4^{\frac{1}{2} \log_2 3 + 3 \log_5 5} ;$$

$$c) 72 \cdot \left( 49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log \sqrt{5} 4} \right).$$

*Tìm x từ đẳng thức (bài 2.44 và 2.45).*

$$2.44. a) \log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3 ;$$

$$b) \log_4 x = \frac{1}{3} \log_4 216 - 2 \log_4 10 + 4 \log_4 3.$$

$$2.45. a) \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b ;$$

$$b) \log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7} \log_{\frac{2}{3}} b.$$

**2.46.** Hãy so sánh

$$a) \log_2 10 \text{ và } \log_5 30 ;$$

$$b) \log_{0,3} 2 \text{ và } \log_5 3 ;$$

$$c) \log_3 5 \text{ và } \log_7 4 ;$$

$$d) \log_3 10 \text{ và } \log_8 57.$$

**2.47.** Tìm giá trị của biểu thức

$$a) \log_2 \left( 2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \cos \frac{\pi}{12} ;$$

$$b) \log_4 \left( \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3} \right) + \log_4 \left( \sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9} \right) ;$$

$$c) \log_{10} \tan 4 + \log_{10} \cot 4 ;$$

$$d) \log_{\pi} (5 + 2\sqrt{6}) + \log_{\pi} (5 - 2\sqrt{6}).$$

**2.48.** Hãy chứng minh

$$a) \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2 ;$$

$$b) 4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4} ;$$

$$c) \log_3 7 + \log_7 3 > 2 ;$$

$$d) 3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}.$$

2.49. Biết  $\log_a x = \alpha$ ,  $\log_b x = \beta$ ,  $\log_c x = \gamma$  và  $abc \neq 1$ . Tính  $\log_{abc} x$  theo  $\alpha, \beta, \gamma$

2.50. a) Biết  $\log_7 12 = a$ ,  $\log_{12} 24 = b$ . Tính  $\log_{54} 168$  theo  $a$  và  $b$ .

b) Biết  $\log_6 15 = a$ ,  $\log_{12} 18 = b$ . Tính  $\log_{25} 24$  theo  $a$  và  $b$ .

2.51. Đơn giản biểu thức sau rồi tính giá trị khi  $x = -2$ .

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4(4x^4).$$

2.52. Cho  $a, b$  là độ dài hai cạnh góc vuông,  $c$  là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông, trong đó  $c - b \neq 1$  và  $c + b \neq 1$ .

Chứng minh rằng

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

2.53. Cho hai số dương  $a$  và  $b$ . Chứng minh rằng

a)  $a^{\log b} = b^{\log a}$  ;

b)  $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ .

2.54. Hãy tính

a)  $\log(2 + \sqrt{3})^{20} + \log(2 - \sqrt{3})^{20}$  ;      b)  $3\log(\sqrt{2} + 1) + \log(5\sqrt{2} - 7)$  ;

c)  $\ln\sqrt{e} + \ln\frac{1}{e}$  ;

d)  $5\ln e^{-1} + 4\ln(e^2\sqrt{e})$ .

2.55. Đơn giản biểu thức

a)  $A = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$  ;

b)  $B = 2\ln a + 3\log_a e - \frac{3}{\ln a} - \frac{2}{\log_a e}$ .

2.56. Hãy tính

a)  $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$  ;      b)  $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7}\right) \cdot \log 7$  ;      c)  $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9}$ .

2.57. Hãy so sánh  $2\ln e^3$  với  $8 - \ln\frac{1}{e}$ .

**2.58.** a) Biết  $\log 3 \approx 0,4771$ , tính  $\log_{81} 90$  (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

b) Biết  $\log 2 \approx 0,3010$  ;  $\ln 10 \approx 2,3026$ . Tính  $\ln 2$  (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

**2.59.** Tìm  $x$ , biết

$$\text{a) } \log x = \frac{1}{2} \log 5a - 3 \log b + 4 \log c ; \quad \text{b) } \log x = 5 \log m + \frac{2}{3} \log n - \frac{1}{4} \log p.$$

**2.60.** Năm 1992, người ta đã biết số  $p = 2^{756839} - 1$  là một số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất được biết cho đến lúc đó). Hỏi rằng, viết trong hệ thập phân, số nguyên tố đó có bao nhiêu chữ số ? (Biết rằng  $\log 2 \approx 0,30102$ ).

**2.61.** Biểu diễn các số sau theo  $\ln 2$  :

$$\ln 16 ; \quad \ln 512 ; \quad \ln(0,125) ; \quad \frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8} ; \quad \ln 72 - 2 \ln 3.$$

**2.62.** Biểu diễn các số sau theo  $a = \ln 2$ ,  $b = \ln 3$  :

$$\ln 36 ; \quad \ln \frac{1}{12} ; \quad \ln(2,25) ; \quad \ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875).$$

**2.63.** Biết  $\log 3 = p$ ,  $\log 5 = q$ . Hãy chứng minh

$$\log_{15} 30 = \frac{1+p}{p+q}.$$

*Sử dụng máy tính bỏ túi để giải các bài tập 2.64 và 2.65.*

**2.64.** Áp suất không khí  $P$  (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao  $x$  (đo bằng mét), tức là  $P$  giảm theo công thức

$$P = P_0 \cdot e^{-ix},$$

trong đó  $P_0 = 760 \text{ mmHg}$  là áp suất ở mức nước biển ( $x = 0$ ),  $i$  là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000m thì áp suất của không khí là 672,71mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000m là bao nhiêu ?

**2.65.** a) Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Nhật là 0,2%. Năm 1998, dân số của Nhật là 125 932 000. Vào năm nào dân số của Nhật sẽ là 140 000 000 ?

b) Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Ấn Độ là 1,7%. Năm 1998, dân số của Ấn Độ là 984 triệu. Hỏi sau bao nhiêu năm dân số của Ấn Độ sẽ đạt 1,5 tỉ ?