§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC. ỨNG DỤNG

4.24. a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{4}$;

c) $-\frac{5\pi}{8}$; d) $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$;

e) *Giải*. $(a+i)^3+(a-i)^3=2a(a^2-3)$. Khi $a=\sqrt{3}$ hoặc $a=-\sqrt{3}$, hoặc $a=0$ thì nó không có acgumen xác định. Khi $-\sqrt{3}<a<0$ hoặc $\sqrt{3}<a$ thì nó có một acgumen bằng 0. Khi $a<-\sqrt{3}$ hoặc $0<a<\sqrt{3}$, nó có một acgumen bằng π.

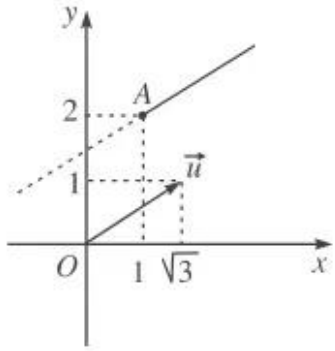
f) *Giải.* z có một acgumen bằng $\frac{\pi}{3}$ có nghĩa là $z = |z|\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, vậy $z - (1 + i\sqrt{3}) = (|z| - 2)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Từ đó khi $|z| > 2$, một acgumen của $z - (1 + i\sqrt{3})$ là $\frac{\pi}{3}$; Khi $0 < |z| < 2$, một acgumen của $z - (1 + i\sqrt{3})$ là $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$; Khi $|z| = 2$, số $z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$ nên không có acgumen xác định.

4.25. $z = z'$ khi và chỉ khi

hoặc $r' = r,\ \varphi' = \varphi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$,

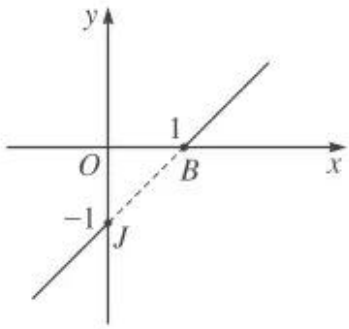
hoặc $r' = -r,\ \varphi' = \varphi + (2k + 1)\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

4.26. *Hướng dẫn.* a) Tia có gốc A (là điểm biểu diễn số $1 + 2i$) với vectơ chỉ hướng $\vec{u}$ biểu diễn số $\sqrt{3} + i$ (tức $\vec{u}$ có một acgumen là $\frac{\pi}{6}$) (không kể điểm A) (h.4.8).



Hình 4.8

b) Các điểm B, J theo thứ tự biểu diễn số 1, $-i$ thì tập hợp cần tìm là các điểm thuộc đường thẳng BJ nằm ngoài đoạn BJ (h.4.9).



Hình 4.9

4.27. a) 0 và 128 ; b) 256 và 0 ;

c) $-\frac{1}{16}$ và 0 ; d) -1 và 0.

Hướng dẫn. d) Trước hết hãy tìm dạng lượng giác của số phức z.

4.28. *Giải.* a) $\sin\varphi + 2i\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$, nên :

Khi $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, số đó có dạng lượng giác không xác định ;

Khi $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, dạng viết trên là dạng lượng giác của số đã cho ;

Khi $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$, số đó có dạng lượng giác

$$-2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right].$$

b) $\cos\varphi + i(1+\sin\varphi) = \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+i\left[1-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$= \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+i\,2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

nên theo câu a) ta có :

Khi $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$, số đã cho có dạng lượng giác không xác định ;

Khi $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$, số đã cho có dạng lượng giác

$$2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right];$$

Khi $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0$, số đã cho có dạng lượng giác

$$-2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)\right].$$

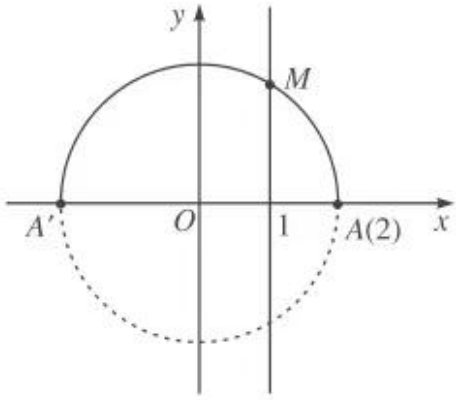
4.29. Cần tìm z sao cho $|z| = |z-2|$ và $\frac{z-2}{z+2} = li$, l là số thực dương.

Cách 1. $|z| = |z-2|$ chứng tỏ điểm M biểu diễn z cách đều O và điểm A biểu diễn số 2, tức là phần thực của z bằng 1.

$\frac{z-2}{z+2} = \frac{(z-2)(\overline{z}+2)}{|z+2|^2} = \frac{z\overline{z}-4+2(z-\overline{z})}{|z+2|^2} = li$ $(l > 0)$ khi và chỉ khi $z\overline{z}-4=0$ (tức là $|z| = 2$) và phần ảo của z phải dương. Vậy điểm M biểu diễn z phải thuộc nửa đường tròn nằm phía trên trục thực, có tâm O, có bán kính bằng 2.

Giao của nửa đường tròn đó với đường thẳng $x = 1$ là điểm M biểu diễn số z cần tìm. Vậy số đó là $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

(Về hình học : điều kiện một acgumen của $z - 2$ bằng một acgumen của $z + 2$ cộng với $\frac{\pi}{2}$ có nghĩa là góc lượng giác tia đầu MA', tia cuối MA (A', A theo thứ tự biểu diễn -2 và 2) bằng $\frac{\pi}{2}$) (h.4.10).



Hình 4.10

Cách 2. Nếu viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $|z| = |z - 2| \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó $\frac{z-2}{z+2} = \frac{1+iy-2}{1+iy+2} = \frac{-1+iy}{3+iy} = \frac{-3+y^2+4iy}{9+y^2} = li$ (l thực dương)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}.$$

Vậy $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

4.30. $\frac{z-2}{z+2} = \frac{z\overline{z} - 4 + 2(z - \overline{z})}{|z+2|^2}$ có một acgumen bằng $\frac{\pi}{3}$ khi và chỉ khi $z\overline{z} - 4 + 2(z - \overline{z}) = l(1 + i\sqrt{3})$, l là số thực dương.

Nếu viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì

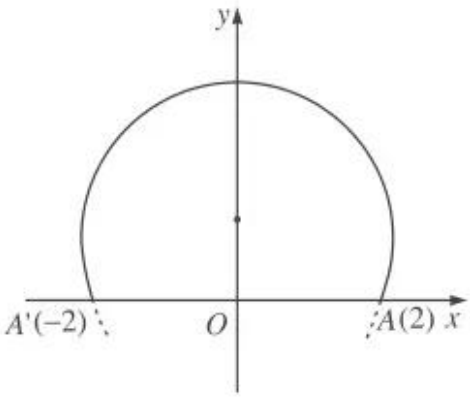
$$z\overline{z} - 4 + 2(z - \overline{z}) = x^2 + y^2 - 4 + 4yi = l + l\sqrt{3}\,i \quad (l > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4y = (x^2 + y^2 - 4)\sqrt{3} > 0.$$

Rõ ràng $4y = (x^2 + y^2 - 4)\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{16}{3} = 0.$

Vậy M chạy trên cung tròn có tâm là điểm biểu diễn $\frac{2}{\sqrt{3}}i$ và có bán kính bằng $\frac{4}{\sqrt{3}}$ nằm ở phía trên trục thực.

Chú ý. A', A là các điểm theo thứ tự biểu diễn các số -2, 2 thì điều kiện $\frac{z-2}{z+2}$ có một acgumen bằng $\frac{\pi}{3}$ có nghĩa là góc lượng giác tia đầu MA', tia cuối MA (M là điểm biểu diễn z) bằng $\frac{\pi}{3}$. Suy ra quỹ tích của M là cung tròn chứa góc $\frac{\pi}{3}$ căng trên đoạn $A'A$ (không kể A, A') (h.4.11).



Hình 4.11

4.31. a) 2φ ; b) $\varphi + \pi$;

c) -2φ ; d) $\varphi + \pi$;

e) $z + \overline{z}$ có một acgumen bằng 0 nếu phần thực của z dương, có một acgumen bằng π nếu phần thực của z âm, có acgumen không xác định nếu z là số ảo (tức $z = i$ hoặc $z = -i$) ;

f) Acgumen của $z^2 + z$ là $\frac{3\varphi}{2}$ nếu $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$, là $\frac{3\varphi}{2} + \pi$ nếu $\cos\frac{\varphi}{2} < 0$ và không xác định nếu $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ (tức là khi $z = -1$) ;

g) Acgumen của $z^2 - z$ là $\frac{3\varphi + \pi}{2}$ nếu $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, là $\frac{3\varphi - \pi}{2}$ nếu $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$ và không xác định nếu $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$ (tức là khi $z = 1$) ;

h) Acgumen của $z^2 + \overline{z}$ là $\frac{\varphi}{2}$ nếu $\cos\frac{3\varphi}{2} > 0$, là $\frac{\varphi}{2} + \pi$ nếu $\cos\frac{3\varphi}{2} < 0$ và không xác định nếu $\cos\frac{3\varphi}{2} = 0$.

Hướng dẫn. Trong các câu f), g), h), dùng công thức biến đổi tổng thành tích trong lượng giác.

4.32. *Giải.* a) $\dfrac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3i} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ nên với số n nguyên dương, ta có :

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3i}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}.$$

Số đó là số thực $\Leftrightarrow \sin\dfrac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow n = 6k$ (k là số nguyên dương).

Số đó là số ảo $\Leftrightarrow \cos\dfrac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = 6k + 3$ (k là số nguyên không âm).

b) $\dfrac{7+i}{4-3i} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên với số n nguyên dương, ta có :

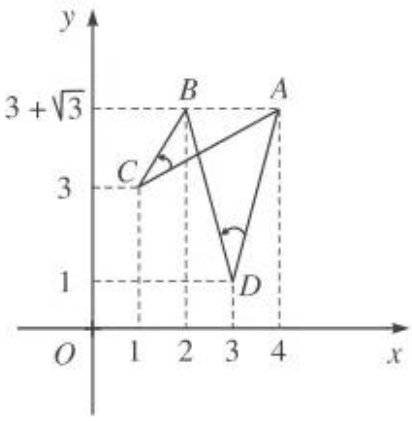
$$\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Số đó là số thực $\Leftrightarrow \sin\dfrac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n = 4k$ (k nguyên dương)

Số đó là số ảo $\Leftrightarrow \cos\dfrac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n = 4k + 2$ (k là số nguyên không âm).

4.33. *Giải.* Chỉ cần chứng minh các góc lượng giác (CA, CB), (DA, DB) có số đo bằng nhau (sai khác $k\pi, k \in \mathbb{Z}$) (h. 4.12).

Ta có $\overrightarrow{CA}$ biểu diễn số phức $3+\sqrt{3}i$, $\overrightarrow{CB}$ biểu diễn số phức $1+\sqrt{3}i$ nên số đo góc (CA, CB) là một acgumen của $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}$ cũng là một acgumen của $(1+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$.



Hình 4.12

Ta có $\overline{DA}$ biểu diễn số phức $1+(2+\sqrt{3})i$, $\overline{DB}$ biểu diễn số phức $-1+(2+\sqrt{3})i$ nên số đo góc (DA, DB) là một acgumen của $\dfrac{-1+(2+\sqrt{3})i}{1+(2+\sqrt{3})i}$ cũng là một acgumen của

$$[-1+(2+\sqrt{3})i][1-(2+\sqrt{3})i] = 2(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+i).$$

Rõ ràng số này và số $2\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$ có cùng acgumen (sai khác $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Chú ý. Có nhiều cách giải khác, chẳng hạn :

1) Vẽ các điểm A, B, C, D, có thể dự đoán tâm đường tròn cần tìm biểu diễn số $3+3i$ (xét các đường trung trực các đoạn AB, CD), kiểm nghiệm nó cách đều A, B, C, D.

2) Có thể đưa bài toán về bài toán hình học giải tích.

4.34. *Giải*. Điểm M biểu diễn số $5 + i$, điểm N biểu diễn số $239 + i$ thì $\tan(Ox, OM) = \dfrac{1}{5} = \tan a$, $\tan(Ox, ON) = \dfrac{1}{239} = \tan b$. Do M, N nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ toạ độ Oxy, còn $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ nên một acgumen của $5 + i$ là a, một acgumen của $239 + i$ là b. Từ đó một acgumen của $\dfrac{(5+i)^4}{239+i}$ là $4a - b$.

Ta có $\dfrac{(5+i)^4}{239+i} = \dfrac{476+480i}{239+i}$, mà $(239+i)(1+i) = 238+240i$

nên $\dfrac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$.

Số $2(1 + i)$ có một acgumen bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $4a - b = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Dễ thấy $0 < b < a < \dfrac{\pi}{4}$, suy ra $4a - b = \dfrac{\pi}{4}$.

4.35. *Giải*. Tam giác OAB là tam giác đều khi và chỉ khi $OA = OB$ và góc (OA, OB) bằng $\dfrac{\pi}{3}$ hoặc $-\dfrac{\pi}{3}$ tức là khi và chỉ khi $z_0 \neq 0$ và nếu đặt $\dfrac{z_1}{z_0} = \alpha$ thì $|\alpha| = 1$ và một acgumen của α là $\dfrac{\pi}{3}$ hoặc $-\dfrac{\pi}{3}$.

Mặt khác, khi $\frac{z_1}{z_0} = \alpha$ thì $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Leftrightarrow z_0^2 + \alpha^2 z_0^2 = \alpha z_0^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2 = \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow |\alpha| = 1$ và một acgumen của α là $\frac{\pi}{3}$ hoặc $-\frac{\pi}{3}$.

Vậy ta đã chứng minh : *OAB* là tam giác đều khi và chỉ khi $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$ ($z_0 \neq 0$).

4.36. *Giải*. a) $z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, $\frac{1}{z^n} = \cos n\varphi - i \sin n\varphi$ nên

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi, \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\varphi.$$

(Đặc biệt $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi, z - \frac{1}{z} = 2i\sin\varphi$).

b) $\cos^4\varphi = \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^4 = \frac{1}{2^4}\left[z^4 + \frac{1}{z^4} + C_4^1\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + C_4^2\right]$

$$= \frac{1}{2^4}(2\cos 4\varphi + 4.2\cos 2\varphi + 6) = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3).$$

$$\sin^5\varphi = \left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^5$$

$$= \frac{1}{2^5 i}\left[\left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) - C_5^1\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + C_5^2\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^5}(2\sin 5\varphi - 2C_5^1 \sin 3\varphi + 2C_5^2 \sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{16}(\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi).$$

4.37. a) $\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$ và $\cos\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\varphi}{2}\right)$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ và $\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$;

c) $\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ và $\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)$.