

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC. ỨNG DỤNG

4.24. Tìm một argumen của mỗi số phức sau :

a) $-2 + 2\sqrt{3}i$;

b) $\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$;

c) $-\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$;

d) $1 - \sin \varphi + i \cos \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) ;

e) $(a+i)^3 + (a-i)^3$ (a là số thực cho trước) ;

f) $z - (1 + i\sqrt{3})$ biết một argumen của z bằng $\frac{\pi}{3}$.

4.25. Cho hai số phức khác 0 là $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$,
($r, r', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$).

Tìm điều kiện cần và đủ về r, r', φ, φ' để $z = z'$.

4.26. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) Một argumen của $z - (1 + 2i)$ bằng $\frac{\pi}{6}$;

b) Một argumen của $z + i$ bằng một argumen của $z - 1$.

4.27. Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau :

a) $\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) i^5 (1 + \sqrt{3}i)^7$;

b) $(1 - i)^4 (\sqrt{3} + i)^6$;

c) $\frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^9}$;

d) $z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$ biết rằng $z + \frac{1}{z} = 1$.

4.28. Viết dạng lượng giác của mỗi số phức sau :

a) $\sin \varphi + i 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$;

b) $\cos \varphi + i(1 + \sin \varphi)$.

4.29. Tìm số phức z sao cho $|z| = |z - 2|$ và một argumen của $z - 2$ bằng một argumen của $z + 2$ cộng với $\frac{\pi}{2}$.

4.30. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\frac{z-2}{z+2}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{3}$.

4.31. Cho số phức z có môđun bằng 1. Biết một argumen của z là φ , hãy tìm một argumen của mỗi số phức sau :

- a) $2z^2$; b) $-\frac{1}{2\bar{z}}$; c) $\frac{\bar{z}}{z}$; d) $-z^2\bar{z}$;
 e) $z + \bar{z}$; f) $z^2 + z$; g) $z^2 - z$; h) $z^2 + \bar{z}$.

4.32. a) Hỏi với số nguyên dương n nào, số phức $\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3i}\right)^n$ là số thực, là số ảo ?

b) Cũng câu hỏi tương tự cho số phức $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n$.

4.33. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$4 + (3 + \sqrt{3})i ; \quad 2 + (3 + \sqrt{3})i ; \quad 1 + 3i ; \quad 3 + i.$$

Chứng minh rằng bốn điểm đó cùng nằm trên một đường tròn.

4.34. Biểu diễn hình học các số $5 + i$ và $239 + i$ rồi chứng minh rằng nếu các số thực a, b thoả mãn các điều kiện $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ và $\tan a = \frac{1}{5}$,

$$\tan b = \frac{1}{239} \text{ thì } 4a - b = \frac{\pi}{4}.$$

4.35. Cho tam giác đều OAB trong mặt phẳng phức (O là gốc toạ độ). Chứng minh rằng nếu A, B theo thứ tự biểu diễn các số z_0, z_1 thì $z_0^2 + z_1^2 = z_0z_1$.

4.36. a) Cho $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$). Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi ; \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\varphi.$$

b) Từ câu a), chứng minh rằng

$$\cos^4 \varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3),$$

$$\sin^5 \varphi = \frac{1}{16}(\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin \varphi).$$

4.37. Tìm dạng lượng giác của các căn bậc hai của các số phức sau :

a) $\cos \varphi - i \sin \varphi$;

b) $\sin \varphi + i \cos \varphi$;

c) $\sin \varphi - i \cos \varphi$.

với $\varphi \in \mathbb{R}$ cho trước.