

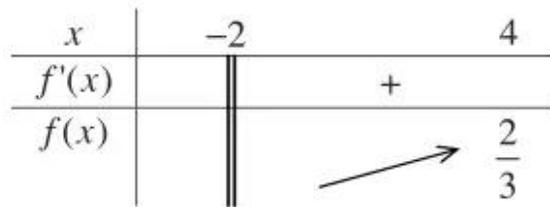
### §3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

**1.21.** a)  $\min_{x \in [-4;4]} f(x) = f(1) = -4 ; \quad \max_{x \in [-4;4]} f(x) = f(4) = 77.$

b)  $\min_{x \in [-3;1]} f(x) = f(-3) = -46 ; \quad \max_{x \in [-3;1]} f(x) = f(1) = 2.$

c)  $\min_{x \in [-1;3]} f(x) = f(2) = 0 ; \quad \max_{x \in [-1;3]} f(x) = f(3) = 25.$

d) Giải.  $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$  với mọi  $x \neq -2$ . Hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $(-2 ; 4]$ .



$\max_{x \in (-2;4]} f(x) = f(4) = \frac{2}{3}$ . Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng  $(-2 ; 4]$ .

e) Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng  $(1; +\infty)$ ;

$$\min_{x \in (1; +\infty)} f(x) = f(2) = 5.$$

f) *Giải.* Hàm số xác định và liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$ .

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ với } -1 < x < 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

**1.22.** a)  $\min_{x \in \mathbb{R}} y = -11$ ;  $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 9$ .

b)  $\min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{23}{27}$ ;  $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 5$ .

*Hướng dẫn*

b)  $y = \sin^3 x + (1 - \cos 2x) + \sin x + 1,$

$$y = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1.$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ), ta được

$$y = t^3 + 2t^2 + t + 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t) = t^3 + 2t^2 + t + 1 \text{ trên đoạn } [-1; 1].$$

**1.23.** Hình thang có diện tích lớn nhất khi  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ . Khi đó diện tích hình thang

$$\text{là } S = \frac{3\sqrt{3}}{4} (\text{m}^2).$$

*Hướng dẫn*

Dựng  $AH \perp CD$ . Đặt  $x = \widehat{ADC}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , ta được  $AH = \sin x$ ;  $DH = \cos x$ ;

$DC = 1 + 2\cos x$ . Diện tích hình thang là

$$S = \frac{AB + CD}{2} AH = (1 + \cos x) \sin x ; 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán quy về : Tìm  $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$  sao cho tại điểm đó  $S$  đạt giá trị lớn nhất

trên khoảng  $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$S = (\cos x + 1)(2\cos x - 1), 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

**1.24.** Trong các tam giác vuông đó, tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất.

Độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác đó là  $x = y = 5\sqrt{2}$  (cm).

*Hướng dẫn.* Gọi  $x, y$  là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền dài 10cm,  $0 < x < 10$  và  $0 < y < 10$ .

Diện tích tam giác là  $S = \frac{1}{2}xy$  ( $\text{cm}^2$ ).

Ta có  $x^2 + y^2 = 100$ .

$S$  đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi tích  $x^2y^2 = x^2(100 - x^2)$  đạt giá trị lớn nhất. Bài toán quy về : Tìm  $x \in (0 ; 10)$  sao cho tại đó hàm số

$$z = x^2(100 - x^2), x \in (0 ; 10)$$

đạt giá trị lớn nhất.

**1.25.** a)  $V = 5x\sqrt{100 - x^2}$  ( $\text{m}^3$ ),  $0 < x < 10$ .

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi  $x = 5\sqrt{2}$  (m).

$$\max_{x \in (0; 10)} V = V(5\sqrt{2}) = 250(\text{m}^3).$$

**1.26. Giải.** a) Vì độ dài của đường tròn đáy hình nón bằng độ dài  $\widehat{AB}$  của quạt tròn dùng làm phễu, nên ta có

$$2\pi r = Rx.$$

Do đó

$$r = \frac{Rx}{2\pi},$$

và  $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ .

b) Thể tích hình nón là

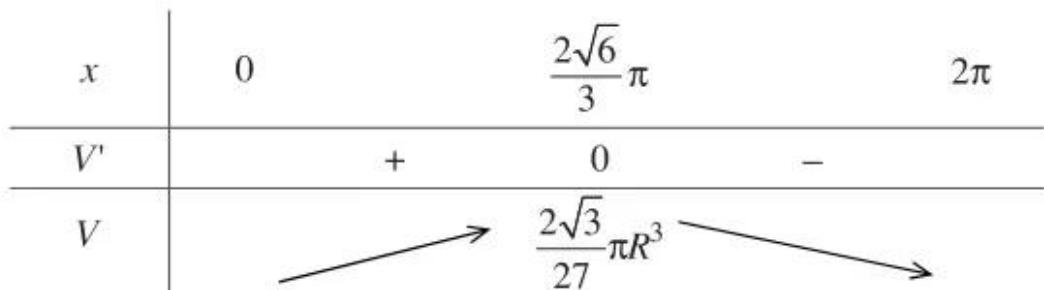
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

c) Ta tìm  $x \in (0; 2\pi)$  sao cho tại đó  $V$  đạt giá trị lớn nhất.

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}.$$

Với  $0 < x < 2\pi$ , ta có

$$V' = 0 \Leftrightarrow 8\pi^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \approx 1,63\pi.$$



Hình nón có thể tích lớn nhất khi  $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \approx 1,63\pi$ .

$$\max_{x \in (0; 2\pi)} V = V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right) = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

**1.27.** a)  $y = \frac{1-x}{x+1}$ ,  $0 < x < 1$  ;

b)  $PQ = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ ,  $0 < x < 1$ .

Đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi  $x = \sqrt{2} - 1$ .

**1.28.**  $T \approx 3,9665$  ( $^{\circ}\text{C}$ ).

*Hướng dẫn.* Tìm  $T \in (0 ; 30)$  sao cho tại đó  $V$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**1.29.** 27,08(km/h) ; 8,9 (xe/ giây).

*Hướng dẫn.*  $f'(v) = 290,4 \cdot \frac{-0,36v^2 + 264}{(0,36v^2 + 13,2v + 264)^2}$ ,  $v > 0$ .

$$f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{264}}{0,6}.$$

$f$  đạt giá trị lớn nhất khi  $v = \frac{\sqrt{264}}{0,6} \approx 27,08$  (km/h) ;

$$f\left(\frac{\sqrt{264}}{0,6}\right) \approx f(27,08) \approx 8,9.$$

**1.30.**  $BM = 2\sqrt{5} \approx 4,472$ (km).

*Hướng dẫn.* Đặt  $x = BM$ ,  $0 \leq x \leq 7$ . Khi đó,  $AM = \sqrt{x^2 + 25}$ ,  $MC = 7 - x$ .

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6} (\text{giờ}), \quad 0 \leq x \leq 7.$$

Hàm số  $T$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm  $x = 2\sqrt{5} \approx 4,472$  (km).