§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1.21. a) $\min\limits_{x\in[-4;4]} f(x) = f(1) = -4$; $\max\limits_{x\in[-4;4]} f(x) = f(4) = 77$.

b) $\min\limits_{x\in[-3;1]} f(x) = f(-3) = -46$; $\max\limits_{x\in[-3;1]} f(x) = f(1) = 2$.

c) $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = f(2) = 0$; $\max\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = f(3) = 25$.

d) *Giải*. $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq -2$. Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(-2\ ;\ 4]$.

x	-2 ‖		4
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3}$

$\max\limits_{x\in(-2;4]} f(x) = f(4) = \dfrac{2}{3}\cdot$ Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $(-2\ ;\ 4]$.

e) Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(1 ; +\infty)$;

$$\min_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f(2) = 5.$$

f) *Giải*. Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1 ; 1]$.

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ với } -1 < x < 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$$\min_{x\in[-1;1]} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \; ; \; \max_{x\in[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

1.22. a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = -11$; $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 9$.

b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \frac{23}{27}$; $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = 5$.

Hướng dẫn

b) $y = \sin^3 x + (1 - \cos 2x) + \sin x + 1$,

$y = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1$.

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \leq t \leq 1)$, ta được

$$y = t^3 + 2t^2 + t + 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t) = t^3 + 2t^2 + t + 1 \text{ trên đoạn } [-1 ; 1].$$

1.23. Hình thang có diện tích lớn nhất khi $\alpha = \frac{2\pi}{3}\cdot$ Khi đó diện tích hình thang là $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (m^2).

Hướng dẫn

Dựng $AH \perp CD$. Đặt $x = \widehat{ADC}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ta được $AH = \sin x$; $DH = \cos x$; $DC = 1 + 2\cos x$. Diện tích hình thang là

$$S = \frac{AB + CD}{2} AH = (1 + \cos x)\sin x \ ; \ 0 < x < \frac{\pi}{2}\cdot$$

Bài toán quy về : Tìm $x \in \left(0 \ ; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho tại điểm đó S đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(0 \ ; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$S' = (\cos x + 1)(2\cos x - 1), \ 0 < x < \frac{\pi}{2}\cdot$$

1.24. Trong các tam giác vuông đó, tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất. Độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác đó là $x = y = 5\sqrt{2}$ (cm).

Hướng dẫn. Gọi x, y là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền dài 10cm, $0 < x < 10$ và $0 < y < 10$.

Diện tích tam giác là $S = \frac{1}{2}xy$ (cm^2).

Ta có $x^2 + y^2 = 100$.

S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi tích $x^2y^2 = x^2(100 - x^2)$ đạt giá trị lớn nhất. Bài toán quy về : Tìm $x \in (0 \ ; 10)$ sao cho tại đó hàm số

$$z = x^2(100 - x^2), x \in (0 \ ; 10)$$

đạt giá trị lớn nhất.

1.25. a) $V = 5x\sqrt{100 - x^2}$ (m^3), $0 < x < 10$.

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x = 5\sqrt{2}$ (m).

$$\max_{x\in(0;10)} V = V(5\sqrt{2}) = 250(m^3).$$

1.26. *Giải.* a) Vì độ dài của đường tròn đáy hình nón bằng độ dài $\overset{\frown}{AB}$ của quạt tròn dùng làm phễu, nên ta có

$$2\pi r = Rx.$$

Do đó

$$r = \frac{Rx}{2\pi},$$

và $$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

b) Thể tích hình nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2},\ 0 < x < 2\pi.$$

c) Ta tìm $x \in (0\ ;\ 2\pi)$ sao cho tại đó V đạt giá trị lớn nhất.

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}.$$

Với $0 < x < 2\pi$, ta có

$$V' = 0 \Leftrightarrow 8\pi^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \approx 1{,}63\pi.$$

x	0		$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$		2π
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$	$\searrow$	

Hình nón có thể tích lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \approx 1{,}63\pi$.

$$\max_{x\in(0;2\pi)} V = V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right) = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

1.27. a) $y = \dfrac{1-x}{x+1}$, $0 < x < 1$;

b) $PQ = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $0 < x < 1$.

Đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi $x = \sqrt{2} - 1$.

1.28. $T \approx 3{,}9665$ (^{o}C).

Hướng dẫn. Tìm $T \in (0\ ;\ 30)$ sao cho tại đó V đạt giá trị nhỏ nhất.

1.29. 27,08(km/h) ; 8,9 (xe/ giây).

Hướng dẫn. $f'(v) = 290{,}4.\ \dfrac{-0{,}36v^2 + 264}{(0{,}36v^2 + 13{,}2v + 264)^2}$, $v > 0$.

$$f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{264}}{0{,}6}.$$

f đạt giá trị lớn nhất khi $v = \dfrac{\sqrt{264}}{0{,}6} \approx 27{,}08$ (km/h) ;

$$f\left(\frac{\sqrt{264}}{0{,}6}\right) \approx f(27{,}08) \approx 8{,}9.$$

1.30. $BM = 2\sqrt{5} \approx 4{,}472$(km).

Hướng dẫn. Đặt $x = BM$, $0 \le x \le 7$. Khi đó, $AM = \sqrt{x^2 + 25}$, $MC = 7 - x$. Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \frac{7-x}{6} \text{ (giờ)}, 0 \le x \le 7.$$

Hàm số T đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 2\sqrt{5} \approx 4{,}472$ (km).