§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

3.35. a) $\frac{1717}{4}\cdot$ *Hướng dẫn.* $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^2 = x^4+2x+\frac{1}{x^2}\cdot$

b) $-\frac{3\ln 3}{2}\cdot$ *Hướng dẫn.* Đặt $u = 2x - 1$.

c) 0. *Hướng dẫn.* Đặt $u = x^2+1$.

d) $\frac{2\ln 2}{3}\cdot$ *Hướng dẫn.* Đặt $u = x^3+1$.

e) ln77 – ln54. *Hướng dẫn.* Đặt $u = x^2+x-2$.

3.36. a) ln2. *Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 + \sin x$.

b) $\frac{\ln 2}{3}\cdot$ *Hướng dẫn.* Đặt $u = 1 + \tan 3x$.

c) 0.

d) $\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}$.

Hướng dẫn. Đặt $u = \tan x$. Khi đó tích phân cần tính bằng $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{2u}$.

3.37. a) $\frac{7\sqrt{7}-8}{3}$;

b) 208,4.

c) 1.

Giải. Đặt $u = \tan\frac{x}{2}$. Khi đó $du = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, suy ra $dx = \frac{2du}{1+u^2}$,

$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2}{1+u^2}$. Vậy tích phân cần tính bằng

$$\int_0^1 du = 1.$$

3.38 a) Đặt $x = a\tan u$. Khi đó

$$dx = \frac{a\,du}{\cos^2 u},\ x^2 + a^2 = a^2(1 + \tan^2 u) = \frac{a^2}{\cos^2 u}.$$

Theo công thức đổi biến, ta có

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int_k^r \frac{du}{a} = \frac{1}{a}(r - k) \text{ với } \tan r = \frac{\beta}{a},\ \tan k = \frac{\alpha}{a}.$$

b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Giải. Đặt $u = \tan\frac{x}{2}$. Khi đó $dx = \frac{2du}{1 + u^2}$. Mặt khác

$$2 + \cos x = 2 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2} = \frac{3 + u^2}{1 + u^2}.$$ Vậy theo a), ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^1 \frac{1 + u^2}{3 + u^2}.\frac{2du}{1 + u^2} = 2\int_0^1 \frac{du}{u^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

3.39. a) $\pi - 3$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = 2x - 1$, $v' = \cos x$.

b) $\pi^3 - 6\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = x^3$, $v' = \sin x$.

c) $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn. Trước hết đổi biến $t = 1 + x^2$. Tích phân cần tìm bằng $\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\,dt$.

Sau đó sử dụng tích phân từng phần với $u = \ln t$, $v' = 1$.

d) $\frac{2e^3 + 1}{9}$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = \ln x$, $v' = x^2$.

e) 1.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = x$, $v' = e^x$.

3.40. *Hướng dẫn.* Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = \cos^{n-1} x$, $v' = \cos x$ suy ra

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx.$$

Thay $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ta có điều cần chứng minh.

Suy ra $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5}.\frac{2}{3}I_1 = \frac{8}{15}.$

3.41. $I_6 = \frac{5\pi}{32}$, $I_7 = \frac{16}{35}$.

Hướng dẫn. Vận dụng công thức tích phân từng phần tương tự như bài 3.40.