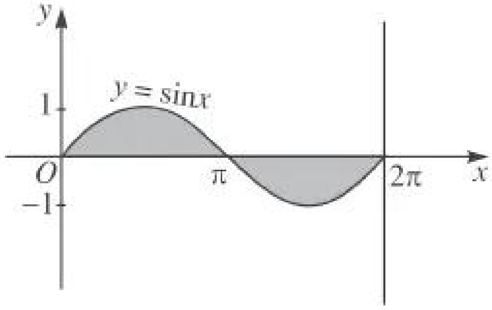
# §5. §6. MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

**3.42.** a) 4.

*Hướng dẫn.* Ta có $\sin x \geq 0$ trên đoạn $[0\ ;\ \pi]$ và $\sin x \leq 0$ trên đoạn $[\pi\ ;\ 2\pi]$. Vậy diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình 3.2) là




*Hình 3.2*

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

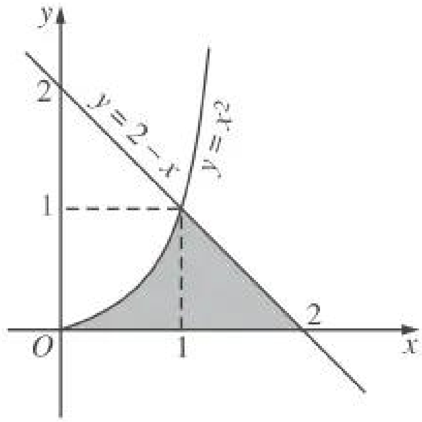
$$= 2 - (-2) = 4.$$

b) $\frac{5}{6}$.

*Giải.* Tìm hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = 2 - x$ và $y = x^2$ bằng cách giải phương trình $2 - x = x^2$. Ta tìm được $x = 1$ và $x = -2$ (loại). Hình tạo thành (phần tô đậm trong hình 3.3) gồm một tam giác cong và một tam giác. Diện tích tam giác cong là

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Diện tích tam giác là $\frac{1}{2}$. Vậy

diện tích hình phẳng cần tìm là $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.




*Hình 3.3*

**3.43.** $\frac{11}{4}$.

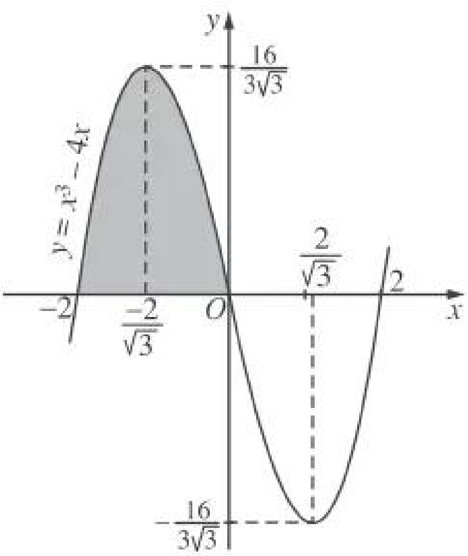
*Hướng dẫn.* $S = \int_0^3 \left|x^3 - 3x^2 + 2x\right| dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$

$$- \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$

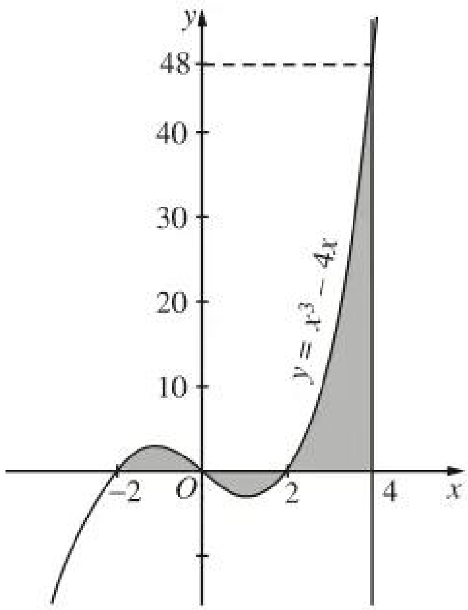
**3.44.** a) 4. *Hướng dẫn.* $S = \int_0^2 x^3 dx$.

b) $\frac{32}{3}$. *Hướng dẫn.* $S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$.

c) 4. *Hướng dẫn.* $S = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx$ (h.3.4)




*Hình 3.4*



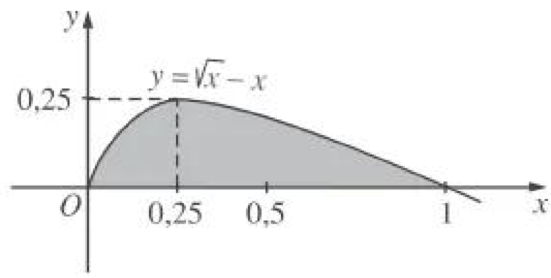

*Hình 3.5*

d) 44. *Hướng dẫn.* (h.3.5)

$$S = \int_{-2}^{4} \left|x^3 - 4x\right| dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)dx$$

$$+ \int_{2}^{4} (x^3 - 4x)dx = 4 + 4 + 36 = 44.$$




*Hình 3.6*

e) $\frac{1}{6}$.

*Hướng dẫn.* (h.3.6) $S = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x)dx$.

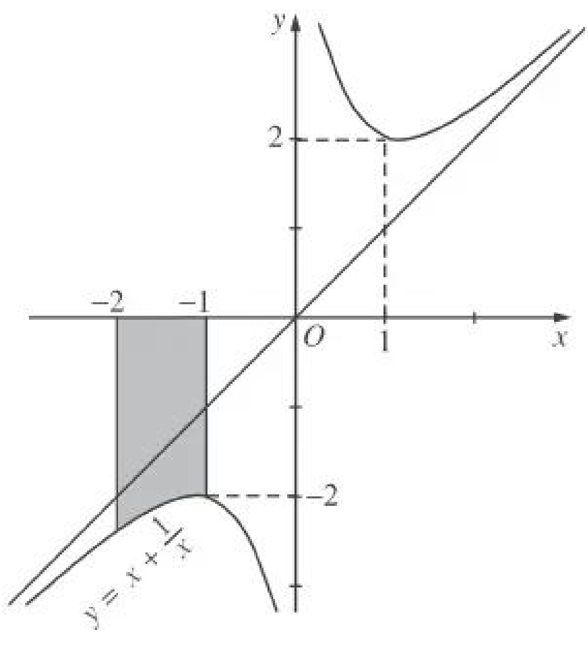
**3.45.** a) e ; b) $\frac{e^4 - e^2}{2} - 1$ ;

c) $2\left(e + \frac{1}{e} - 2\right)$.

**3.46.** a) 2ln5 ; b) 3ln3.

**3.47.** a) $\ln 2 + \frac{3}{2}$.

*Hướng dẫn.* (h.3.7) $S = \int_{-2}^{-1} \left|x + \frac{1}{x}\right| dx$.




*Hình 3.7*

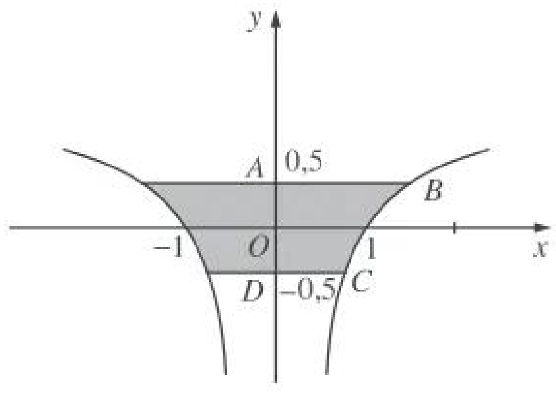
b) 0,5.

*Hướng dẫn.* $S = \int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

c) $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

*Hướng dẫn.* (h.3.8). Diện tích hình thang cong *ABCD* là

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - y}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$




*Hình 3.8*

**3.48.** $k = \frac{8}{3}$. *Hướng dẫn*. Diện tích cần tìm là $4\sqrt{a}\int\limits_0^a \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{8a^2}{3}$.

**3.49.** a) 1.

b) 8.

*Giải*. Từ $y = \frac{2}{(x-1)^2}$, ta rút ra

$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \text{ hoặc } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}.$$

Vậy $S = \int\limits_2^8 \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}\right)\right]\mathrm{d}y$

$$= \int\limits_2^8 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = 8.$$

**3.50.** a) $\frac{14}{3}$.

*Hướng dẫn*. $S = \int\limits_0^2 (x^2 + 2 - x)\mathrm{d}x$.

b) $\frac{7}{6}$.

*Hướng dẫn*. (h.3.9) $S = \int\limits_0^1 (2 - x^2 - x)\mathrm{d}x$.

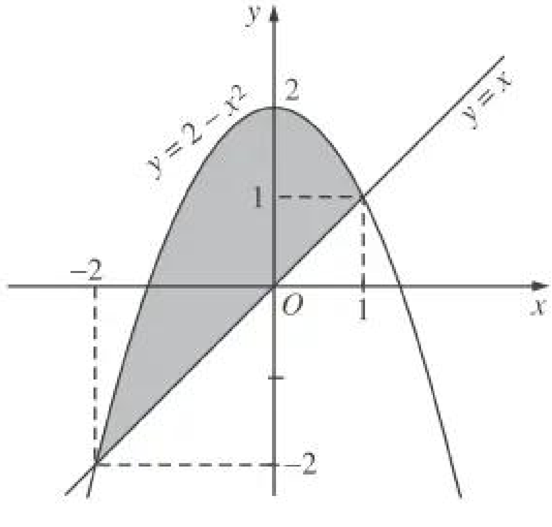
c) $\frac{9}{2}$.

*Hướng dẫn*. (h.3.10)

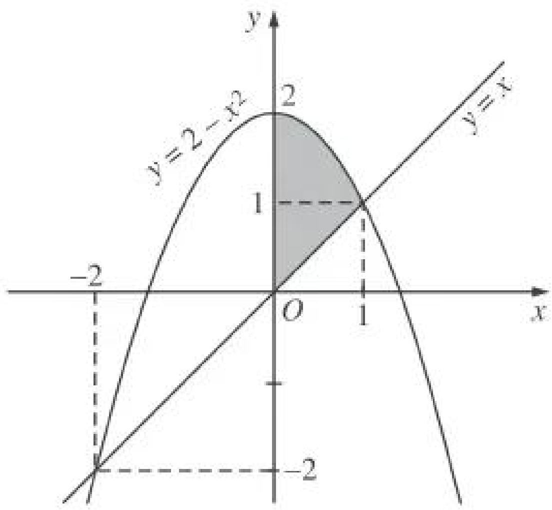
$$S = \int\limits_{-2}^1 (2 - x^2 - x)\mathrm{d}x.$$

d) $\frac{22}{3}$.

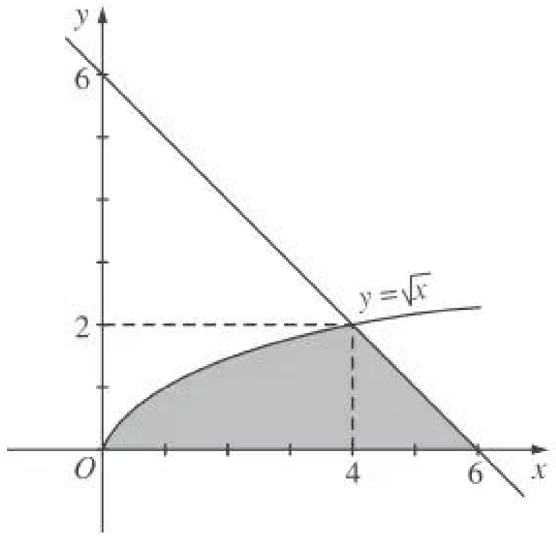
*Hướng dẫn*. (h.3.11) $S = \int\limits_0^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x + 2$.



*Hình 3.9*



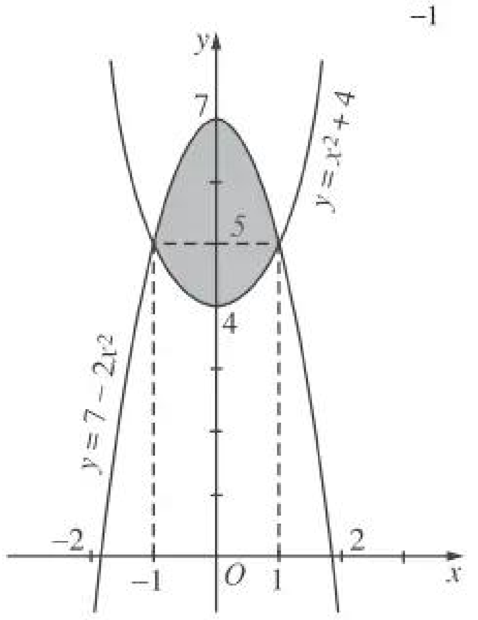
*Hình 3.10*



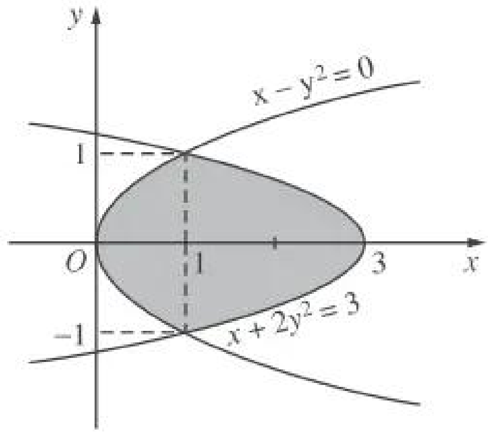
*Hình 3.11*

**3.51.** a) 4.

*Hướng dẫn.* (h.3.12) $S = \int_{-1}^{1} (7 - 2x^2 - x^2 - 4)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (3 - 3x^2)\mathrm{d}x = 4.$




*Hình 3.12*




*Hình 3.13*

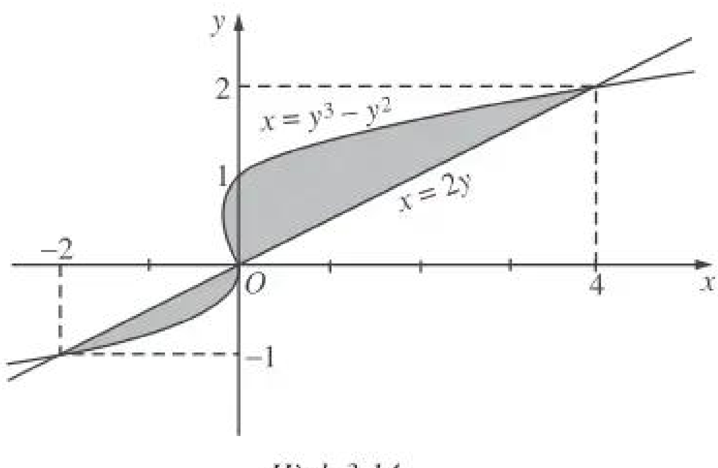
b) 4.

*Hướng dẫn.* (h.3.13) $S = 2\int_{0}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x + 2\int_{1}^{3} \sqrt{\frac{3 - x}{2}}\mathrm{d}x = 2.\frac{2}{3} + 2.\frac{4}{3} = 4.$

c) $\frac{37}{12}$.

*Hướng dẫn.* (h.3.14)

$$S = \int_{0}^{2} (2y - y^3 + y^2)\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0} (y^3 - y^2 - 2y)\mathrm{d}y = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$




*Hình 3.14*

**3.52.** 18. *Hướng dẫn.* $V = \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2}\,dx$.

**3.53.** a) $\frac{512\pi}{15}$ ; b) $\frac{(e^6 - 1)\pi}{2}$ ;

c) $\frac{\pi}{2}$ ; d) $2\pi$.

**3.54.** a) $8\pi$ ; b) $\frac{\left(6.2^{\frac{2}{3}} - 3\right)\pi}{5}$ ;

c) $\frac{(e^2 - 1)\pi}{2}$ ; d) $2\pi$. *Hướng dẫn.* $V = \pi\int_1^3 (3 - y)dy$.