§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1.36. a) Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^{-}$ và $x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^{+}$). Đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

b) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 2^{-}$ và $x \to 2^{+}$). Đường thẳng $y = 4$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

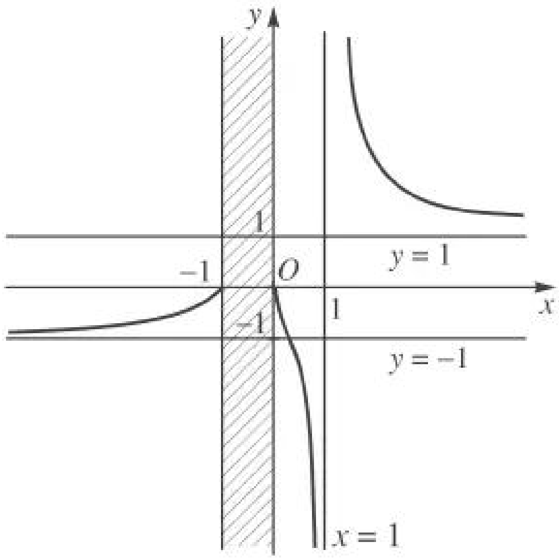
c) *Giải*. Vì $\lim\limits_{x \to 1^{+}} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^{-}} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 1^{+}$ và $x \to 1^{-}$).

Vì
$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

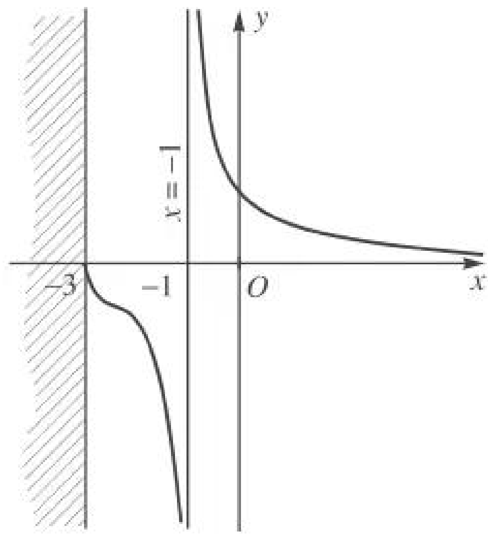
$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 - \frac{1}{x}} = -1$$

nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$) và đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.8).

d) Đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to (-1)^-$ và $x \to (-1)^+$).
Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$) (h.1.9).



Hình 1.8



Hình 1.9

1.37. a) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 0^+$ và $x \to 0^-$).
Đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

b) Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 3^-$ và $x \to 3^+$).
Đường thẳng $y = x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

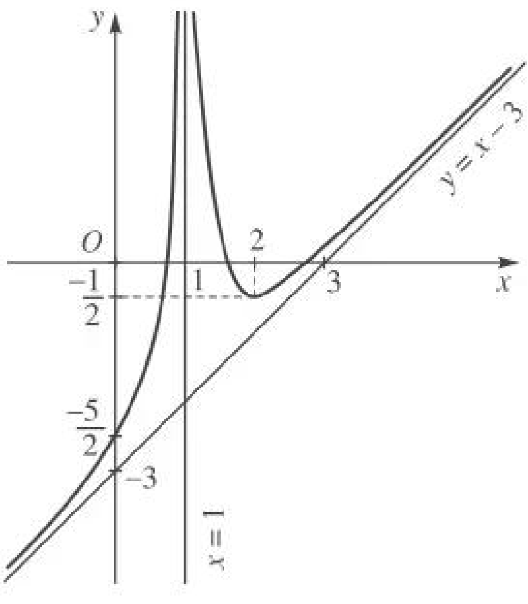
c) *Giải*

Vì $\lim\limits_{x \to 1} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 1^-$ và $x \to 1^+$). Vì

$$y - (x - 3) = \frac{1}{2(x-1)^2} \to 0$$

khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$

nên đường thẳng $y = x - 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$) (h.1.10).



Hình 1.10

d) Đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

Hướng dẫn. Có thể viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = 2x - 1 + \frac{1 - 2x}{x^2 + 1}.$$

Vì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của nó không có tiệm cận đứng.

1.38. a) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 0^+$ và $x \to 0^-$).

Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to 2^+$ và $x \to 2^-$).

Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

b) Tiệm cận đứng : $x = 1$ (khi $x \to 1^+$ và $x \to 1^-$).

Tiệm cận đứng : $x = -1$ (khi $x \to (-1)^+$ và $x \to (-1)^-$).

Tiệm cận ngang : $y = 0$ (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

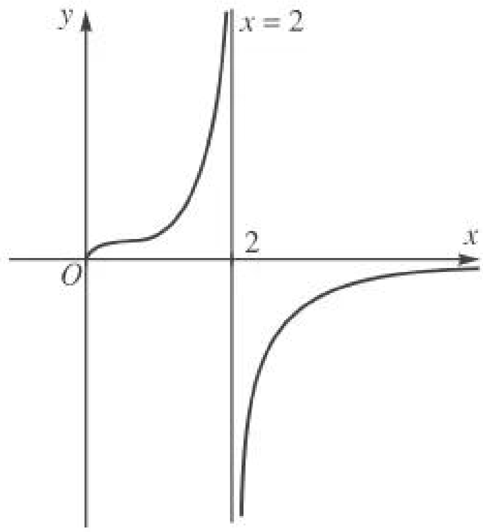
c) Tiệm cận đứng : $x = 1$ (khi $x \to 1^+$ và $x \to 1^-$).

Tiệm cận đứng : $x = -1$ (khi $x \to (-1)^+$ và $x \to (-1)^-$).

Tiệm cận xiên : $y = x$ (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

d) Tiệm cận đứng : $x = 2$ (khi $x \to 2^+$ và $x \to 2^-$).

Tiệm cận ngang : $y = 0$ (khi $x \to +\infty$) (h.1.11).



Hình 1.11

1.39. a) *Giải*. Ta có

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

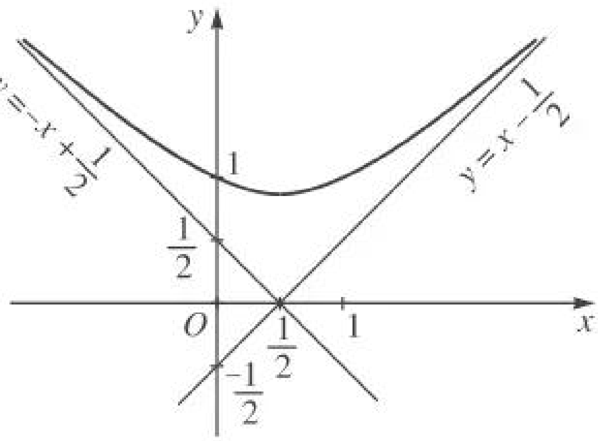
$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y+x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = \frac{1}{2}.$$

Đường thẳng $y = -x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.12).



Hình 1.12

b) Tiệm cận xiên : $y = 2x + 1$ (khi $x \to +\infty$).

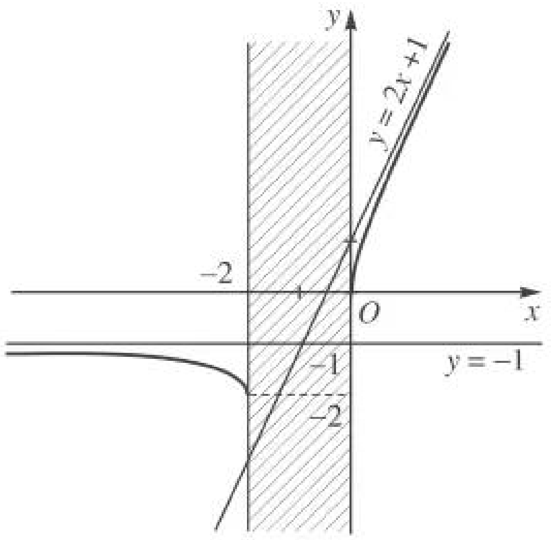
Tiệm cận ngang : $y = -1$ (khi $x \to -\infty$) (h.1.13).

c) Tiệm cận xiên : $y = x$ (khi $x \to +\infty$),

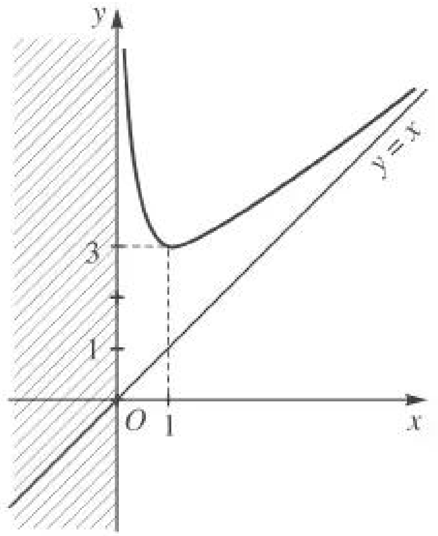
Tiệm cận xiên : $y = -x$ (khi $x \to -\infty$).

d) Tiệm cận đứng : $x = 0$ (khi $x \to 0^+$).

Tiệm cận xiên : $y = x$ (khi $x \to +\infty$) (h.1.14).



Hình 1.13



Hình 1.14

1.40. a) $I\left(-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

b) $\begin{cases} x = X - \frac{3}{2} \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}$; $Y = -\frac{13}{4X}$.

1.41. a) $I(2 ; 5)$.

b) $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 5 \end{cases}$; $Y = 2X - \frac{1}{X}$.

1.42. a) $I\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$; $\begin{cases} x = X - \frac{1}{2} \\ y = Y + \frac{1}{2}. \end{cases}$; $Y = \frac{9}{4X}$.

b) $I(-1\,;1)$; $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 1. \end{cases}$; $Y = 3X + \frac{2}{X}$.

1.43. *Giải*. b) Ta có $f(-1) = 0$, và

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\frac{x}{2}(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)^+} \left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\frac{1}{2}$. Vậy hàm số f có đạo hàm tại điểm $x = -1$ và $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

c) Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm I là $y = -\frac{1}{2}(x+1)$.

Trên khoảng $(-\infty\,; -1)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến đó ; trên khoảng $(-1\,; +\infty)$ đường cong $(\mathscr{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó.

d) Lấy đối xứng đường cong $(\mathscr{C})$ qua trục hoành, ta được đồ thị của hàm số $y = -f(x)$.