§7. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

2.87. a) $x = -\frac{1}{3}$;

Hướng dẫn. Nhận xét $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 1$, nên $3 + 2\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^{-1}$.

b) $x = 1$;

Hướng dẫn. $5^{x+1} + 6.5^{x} - 3.5^{x-1} = 5^{x-1}.52$.

c) $x = 0$;

Giải. $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 9.5^{x} + 5^{x+1} + 5^{x+2}$

$\Leftrightarrow 3^{x}(3 + 9 + 27) = 5^{x}(9 + 5 + 25)$

$\Leftrightarrow 3^{x} = 5^{x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

d) $x = 2$.

2.88. a) $x = 1$ và $x = -3$;

b) $x = 1$;

c) $x = 2$;

Giải. Điều kiện $x^2 - 3 > 0$ và $6x - 10 > 0$; tức là $x > \sqrt{3}$. Ta có

$$\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2 - 3}{6x - 10}.2\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{3x - 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Tìm được $x = 1$ và $x = 2$.

Đối chiếu với điều kiện, chỉ có $x = 2$ thoả mãn.

d) $x = \log_2 5$.

Hướng dẫn. $\log_2(2^{x+1} - 5) = x \Leftrightarrow 2^{x+1} - 5 = 2^x$.

2.89. a) $x = 5$; b) $x = -\frac{1}{4}$;

c) $x = -5$; $x = -5 + 5\sqrt{2}$; d) $x = -\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn. d) Đưa về $2^{-(2+3x)} = 2^{-\frac{x}{2}}$.

2.90. a) $x = 0$ và $x = 1$.

Hướng dẫn. Đặt $y = 2^{x+1}$ (với $y > 0$) đưa phương trình đã cho về dạng

$$y^2 - 6y + 8 = 0.$$

b) $x = -1$ và $x = 1$;

Hướng dẫn. Đặt $y = 3^x$ (với $y > 0$) ta có $3y^2 - 10y + 3 = 0$.

c) $x = -\frac{3}{2}$ và $x = -1$;

Giải. $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(2x+4)} - 12.3^{2x+4} + 27 = 0.$

Đặt $y = 3^{2x+4}$ (với $y > 0$), dẫn đến phương trình $y^2 - 12y + 27 = 0$.

Tìm được $y = 3$ và $y = 9$ (đều thoả mãn).

Với $y = 3$ thì $3^{2x+4} = 3 \Leftrightarrow 2x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Với $y = 9$ thì $3^{2x+4} = 3^2 \Leftrightarrow 2x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

d) $x = 0$ và $x = \log_{\frac{5}{7}}\frac{2}{3}$.

Giải. Chia hai vế của phương trình cho 35^x, ta được

$$3.\left(\frac{5}{7}\right)^x + 2.\left(\frac{7}{5}\right)^x = 5.$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ (với $t > 0$), ta có $3t + \frac{2}{t} = 5$ hay $3t^2 - 5t + 2 = 0$.

Từ đó tìm được $t = 1$ và $t = \frac{2}{3}$ (đều thoả mãn).

Với $t = 1$ ta có $\left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$ nên $x = 0$.

Với $t = \frac{2}{3}$ ta có $\left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{2}{3}$ nên $x = \log_{\frac{5}{7}}\frac{2}{3}$.

2.91. a) $x = -2$.

Hướng dẫn. Chia cả hai vế cho 6^x, rồi đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (với $t > 0$) dẫn đến phương trình $9t^2 + 5t - 4 = 0$.

b) $x = -1$ và $x = 1$.

Giải. $8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^x$

$$\Leftrightarrow 8.2^{3x} + 8.\frac{1}{2^{3x}} + 24.2^x + 24.\frac{1}{2^x} = 125$$

$$\Leftrightarrow 8\left(2^{3x} + \frac{1}{2^{3x}}\right) + 24\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) = 125.$$

Đặt $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ với $y \geq 2$, ta có

$$8(y^3 - 3y) + 24y = 125 \Leftrightarrow y^3 = \frac{125}{8} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}.$$

Khi đó $2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2}$, dẫn đến phương trình $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$ với $t = 2^x$ $(t > 0)$.

Giải phương trình ẩn t này, ta tìm được $t = 2$ và $t = \frac{1}{2}$.

Với $t = 2$ thì $2^x = 2$, tức là $x = 1$.

Với $t = \frac{1}{2}$ thì $2^x = \frac{1}{2}$, tức là $x = -1$.

2.92. a) $x = 3$ và $x = 1 + 2^{-\frac{7}{4}}$.

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 1$.

Đặt $y = \log_2(x-1)$, dẫn đến phương trình $4y^2 + 3y - 7 = 0$.

b) $x = 2^{-\frac{4}{5}}$ và $x = 2^{-3}$.

Giải. Điều kiện $x > 0$; $x \neq \frac{1}{2}$; $x \neq \frac{1}{4}$. Ta có

$$\log_{4x} 8 - \log_{2x} 2 + \log_9 243 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_8 4x} - \frac{1}{\log_2 2x} + \frac{5}{2} = 0.$$

Đặt $t = \log_2 x$ (với $t \neq -1$; $t \neq -2$), ta có phương trình

$$\frac{3}{2+t} - \frac{1}{1+t} + \frac{5}{2} = 0.$$

Quy đồng mẫu số và rút gọn dẫn đến $5t^2 + 19t + 12 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm $t = -3$ và $t = -\frac{4}{5}$.

Đối chiếu với điều kiện các giá trị tìm được đều thoả mãn. Dẫn đến $x = 2^{-\frac{4}{5}}$ và $x = 2^{-3}$.

c) $x = 3$ và $x = 81$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{\log_3 x}$ (với $t \geq 0$) dẫn đến phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$.

2.93. a) $x = 3$ và $x = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn. Lưu ý $\log_x 3 = \dfrac{1}{\log_3 x}$. Đặt $t = \log_3 x$ (với $t \neq 0$) dẫn đến phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

b) $x = 8$ và $x = 2^{-\frac{2}{3}}$.

Hướng dẫn. Lưu ý $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$. Đặt $t = \log_2 x$ (với $t \neq 0$) dẫn đến phương trình $-3t^2 + 7t + 6 = 0$.

c) $x = 1$ và $x = \dfrac{1}{243}$.

Giải. Đặt $t = \log_3 x$, ta có

$$\frac{1+t}{1+\frac{1}{2}t} = \frac{1+\frac{1}{3}t}{1+\frac{1}{4}t} \Leftrightarrow 3(1+t)(4+t) = 2(2+t)(3+t)$$

$\Leftrightarrow 12 + 15t + 3t^2 = 12 + 10t + 2t^2 \Leftrightarrow t^2 + 5t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -5$.

Với $t = 0$ thì $\log_3 x = 0$, nên $x = 3^0 = 1$.

Với $t = -5$ thì $\log_3 x = -5$, nên $x = 3^{-5} = \dfrac{1}{243}$.

2.94. a) $x = 2$ và $x = -2$.

Hướng dẫn. Nhận xét $\sqrt{6+\sqrt{35}}.\sqrt{6-\sqrt{35}} = 1$, đặt $t = \left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x$ (với $t > 0$) dẫn đến phương trình $t + \dfrac{1}{t} = 12$.

b) $x = \pm\sqrt{3,5}$ và $x = \pm\sqrt{4,5}$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \log_2(2x^2 - 5)$ (với $t \neq 0$) dẫn đến phương trình

$$t + \frac{2}{t} = 3.$$

2.95. a) $x = 3^{36}$.

Giải. $\log_9(\log_3 x) + \log_3(\log_9 x) = 3 + \log_3 4$

$$\Leftrightarrow \log_3(\log_3 x)^{\frac{1}{2}} + \log_3\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right) = 3 + \log_3 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[\frac{1}{2}(\log_3 x)^{\frac{3}{2}}\right] = 3 + \log_3 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^{\frac{3}{2}} = 2^3.3^3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = 36 \Leftrightarrow x = 3^{36}.$$

b) $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn. Biến đổi đưa về lôgarit cơ số 2.

c) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ và $x = \sqrt{5}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình về dạng tích

$$(3\log_2 x + 2)(2\log_5 x - 1) = 0.$$

2.96. a) $m \leq \frac{25}{4}$.

Giải. Đặt $5^{x+1} = t$ (với $t > 0$). Bài toán trở thành :

Tìm m để phương trình $t^2 - 5t + m = 0$ (1) có ít nhất một nghiệm dương. Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta = 25 - 4m \geq 0$ hay $m \leq \frac{25}{4}$. Gọi các nghiệm của (1) là t_1 và t_2 $(t_1 \le t_2)$, theo hệ thức Vi-ét $t_1 + t_2 = 5$ suy ra $t_2 > 0$. Vậy với $m \le \dfrac{25}{4}$ thì phương trình (1) có ít nhất nghiệm $t_2 > 0$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm.

b) $m < -\dfrac{1}{2}$ hoặc $m \ge 4 + 2\sqrt{5}$.

Giải. Đặt $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = t$ (với $t > 0$). Bài toán trở thành :

Tìm m để phương trình $t^2 - mt + 2m + 1 = 0$ (2) có ít nhất một nghiệm dương. Điều kiện để (2) có nghiệm là

$$\Delta = m^2 - 4(2m + 1) = m^2 - 8m - 4 \ge 0$$

hay $m \le 4 - 2\sqrt{5}$ hoặc $m \ge 4 + 2\sqrt{5}$.

Gọi các nghiệm của (2) là t_1 và t_2 $(t_1 \le t_2)$, theo hệ thức Vi-ét :

$$t_1 + t_2 = m \; ; \; t_1t_2 = 2m + 1.$$

- Với $m \ge 4 + 2\sqrt{5}$ thì $t_1 + t_2 = m \ge 4 + 2\sqrt{5}$ suy ra $t_2 > 0$.
- Với $m < -\dfrac{1}{2}$ thì $t_1t_2 < 0$ suy ra $t_2 > 0$.
- Với $-\dfrac{1}{2} < m \le 4 - 2\sqrt{5}$ thì $t_1 + t_2 < 0$ và $t_1t_2 > 0$ suy ra $t_1 < t_2 < 0$.

Vậy với $m < -\dfrac{1}{2}$ hoặc $m \ge 4 + 2\sqrt{5}$ thì phương trình (2) có ít nhất nghiệm $t_2 > 0$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm.

Chú ý. Có thể lập bảng xét dấu trực tiếp với

$$\Delta = m^2 - 8m - 4 \; ; \; S = m \; ; \; P = 2m + 1.$$

2.97. a) $m > 0$.

Giải. Đặt $4^x = t$ (với $t > 0$). Bài toán trở thành :

Tìm m để phương trình $16t^2 + \dfrac{t}{4} - 5m = 0$ (1) có nghiệm dương duy nhất.

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta = \frac{1}{16} + 320m \geq 0$ hay $m \geq -\frac{1}{5120}\cdot$ Lại có

$t_1 + t_2 = -\frac{1}{64}$; $t_1 t_2 = -\frac{5m}{16}$.

Nên (1) có nghiệm dương duy nhất khi $-\frac{5m}{16} < 0$, tức là $m > 0$.

b) $m = 16$ hoặc $m < 0$.

Giải. Bài toán quy về tìm m để hệ

$$\begin{cases}(x+4)^2 = mx \\ x + 4 > 0\end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

hay
$$\begin{cases}x^2 + (8-m)x + 16 = 0 & (1) \\ x > -4 & (2)\end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

tức là (1) có nghiệm duy nhất thoả mãn $x > -4$.

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta = m^2 - 16m \geq 0$ hay $m \leq 0$ hoặc $m \geq 16$.

Xét các trường hợp :

- $m = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{0-8}{2} = -4$ (không thoả mãn $x > -4$).
- $m = 16$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{16-8}{2} = 4$ (thoả mãn $x > -4$).
- $m < 0$ hoặc $m > 16$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Ta có : $x_1 < -4 < x_2 \Leftrightarrow (x_1+4)(x_2+4) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + 4(x_1+x_2) + 16 < 0$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1x_2 = 16$ và $x_1 + x_2 = m - 8$.

Dẫn đến $16 + 4(m-8) + 16 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

2.98. a) $x = \log_{\frac{7}{5}}(\log_5 7)$.

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế rồi chia cả hai vế cho 5^x, ta được

$$\left(\frac{7}{5}\right)^x = \log_5 7.$$

b) $x = 3$ và $x = -\log_5 2$.

Giải. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế, ta được

$$\log_5 5^x + \log_5 8^{\frac{x-1}{x}} = \log_5 500.$$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{x-1}{x}.3\log_5 2 = 3 + 2\log_5 2.$

$\Leftrightarrow x^2 + x\left(3\log_5 2 - 2\log_5 2 - 3\right) - 3\log_5 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x\left(\log_5 2 - 3\right) - 3\log_5 2 = 0.$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -\log_5 2$.

c) $x = \sqrt{5}$.

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế.

d) $x = \sqrt{3}$ và $x = \sqrt[3]{3}$.

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$. Lấy lôgarit cơ số x cả hai vế rồi đặt $t = \log_x 3$, dẫn đến phương trình $t^2 - 5t + 6 = 0$.

2.99. a) $x = 9$.

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 9 cả hai vế rồi đặt $t = \log_9 x$, dẫn đến phương trình $(t-1)^2 = 0$.

b) $x = \dfrac{1}{5}$ và $x = \sqrt[4]{5}$.

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế rồi đặt $t = \log_5 x$ dẫn đến phương trình $4t^2 + 3t - 1 = 0$.

2.100. a) $x = 2$ và $x = \log_2 3 - 2$.

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \arctan\frac{1}{5} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa là

$$\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2 > 0.$$

Lấy lôgarit cơ số 4 cả hai vế của phương trình, ta được

$\log_{0,5}(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2) = \log_4 3^{-2}$

$\Leftrightarrow -\log_2(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2) = -\log_2 3$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2 = 3$ (thoả mãn điều kiện)

$\Leftrightarrow \cos x(5\sin x - \cos x) = 0.$

- $\cos x = 0$ ta tìm được $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- $5\sin x - \cos x = 0$, tức là $\tan x = \frac{1}{5}$. Do đó $x = \arctan\frac{1}{5} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2.101. a) $x = 1$.

Hướng dẫn. Hàm số $f(x) = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số $g(x) = 5 - 2x$ luôn nghịch biến và $f(1) = g(1)$.

b) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. $\left(\frac{4}{5}\right)^x > 0$ với mọi x, còn $-2x^2 + 4x - 9 < 0$ với mọi x.

c) $x = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn. Hàm số $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ luôn nghịch biến, còn hàm số

$g(x) = 5x - \frac{3}{2}$ luôn đồng biến và $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$.

2.102. a) $x = 2$.

Hướng dẫn. Chia hai vế cho 10^x, ta được $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ rồi chứng tỏ rằng $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

b) $x = 2$.

Giải. Chia hai vế cho $\sqrt{10^x}$, ta được

$$\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{10}\right)^x} + \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{10}\right)^x} = 1.$$

Đặt vế trái là $f(x)$ ta thấy $f(2) = 1$.

Với $x > 2$, ta có

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{10}\right)^x} + \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{10}\right)^x} < \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{10}\right)^2} = 1.$$

Với $x < 2$, tương tự ta có $f(x) > 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

c) $x = 2$. *Hướng dẫn.* Chia hai vế cho 2^x.

d) $x = 1$.

Giải. Đặt $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x$; $g(x) = -2x + 6$. Dễ thấy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$; $g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = g(1) = 4$.

Với $x > 1$ ta có $f(x) > f(1) = g(1) > g(x)$;

Với $x < 1$ ta có $f(x) < f(1) = g(1) < g(x)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2.103. a) $x = 0$ và $x = 1$.

Giải. Đặt $t = 3^{x-1}$ (với $t > 0$), ta có $3t^2 + (3x - 7)t + 2 - x = 0$. (1)

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn t, ta tìm được $t = \frac{1}{3}$ và $t = -x + 2$.

• Với $t = \frac{1}{3}$ thì $3^{x-1} = 3^{-1}$, do đó $x = 0$.

• Với $t = -x + 2$ thì $3^{x-1} = -x + 2$.

Hàm số $f(x) = 3^{x-1}$ luôn đồng biến và $f(1) = 1$.

Hàm số $g(x) = -x + 2$ luôn nghịch biến và $g(1) = 1$.

Do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất của $3^{x-1} = -x + 2$.

b) $x = 4$.

Hướng dẫn. Đặt $t = 5^{5-x}$ (với $t > 0$), dẫn đến phương trình

$t^2 - 2t(x-2) + 3 - 2x = 0$, rồi làm tiếp như câu a).

2.104. a) $x = 2$.

Giải. Điều kiện $x > 0$. Áp dụng công thức $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, ta có

$$9^{\log_2 x} = x^2.3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}. \qquad (1)$$

Chia hai vế của (1) cho $3^{\log_2 x}$ ta có

$$3^{\log_2 x} = x^2 - 1.$$

Đặt $\log_2 x = t$, ta có $x = 2^t$ dẫn đến phương trình

$$3^t = 4^t - 1, \text{ tức là } \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1. \qquad (2)$$

Vế trái của (2) là hàm nghịch biến (vì các cơ số $\frac{3}{4} < 1$; $\frac{1}{4} < 1$), còn vế phải của (2) là hằng số, nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1$. Suy ra $x = 2$.

b) $x = 2$.

Hướng dẫn. Chia cả hai vế của phương trình cho $3^x \left(= (\sqrt{9})^x\right)$, ta có

$$4\left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^x + \left(\sqrt{\frac{5}{9}}\right)^x = 1.$$

Sau đó lập luận như phương trình (2) của câu a).

2.105. a) Khi $a > 1$, $b > 1$ thì các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ đồng biến.

Với $x > x_0$ ta có $a^x > a^{x_0}$; $b^x > b^{x_0}$. Vì vậy $a^x + b^x > a^{x_0} + b^{x_0} = c$.

Với $x < x_0$ ta có $a^x < a^{x_0}$; $b^x < b^{x_0}$. Vì vậy $a^x + b^x < a^{x_0} + b^{x_0} = c$.

Do đó phương trình $a^x + b^x = c$ có nghiệm x_0 thì nghiệm đó là duy nhất.

b) Cách giải tương tự như câu a), với lưu ý khi $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ thì các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ nghịch biến.

Câu a) và b) được minh hoạ bởi các ví dụ sau :

$4^x + 6^x = 13.2^x \Leftrightarrow 2^x + 3^x = 13$ có nghiệm duy nhất $x = 2$.

$16^x + 9^x = 25^x \Leftrightarrow \left(\frac{16}{25}\right)^x + \left(\frac{9}{25}\right)^x = 1$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2.106. a) $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hướng dẫn. Đặt $t = 2^{\cos^2 x}$ $(1 \le t \le 2)$, ta được phương trình $t^2 - 6t + 8 = 0$. Giải ra ta được $t = 4$ (loại) và $t = 2$.

b) $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$; $x = \pi + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Giải. Biến đổi phương trình về dạng

$$3.3^{2(\sin x + \cos x)} - 8.15^{\cos x + \sin x} + 5.5^{2(\cos x + \sin x)} = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2(\sin x + \cos x)}$, rồi đặt $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{\cos x + \sin x}$ (với $t > 0$) dẫn đến phương trình

$$5t^2 - 8t + 3 = 0.$$

Giải ra ta được $t = 1$ và $t = \frac{3}{5}$.

• Với $t = 1$ ta có $\left(\frac{5}{3}\right)^{\cos x + \sin x} = 1$, dẫn đến $\cos x + \sin x = 0$ hay $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Do vậy $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

• Với $t = \frac{3}{5}$ ta có $\left(\frac{5}{3}\right)^{\cos x + \sin x} = \frac{3}{5}$, dẫn đến $\cos x + \sin x = -1$ hay $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Do vậy $x = \pi + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2.107. a) $x = 1$.

b) $x = 3^{1+\sqrt{2}}$; $x = 3^{1-\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cơ số 3, rồi đặt $t = \log_3 x$ (với $t \neq 0$).

2.108. a) $x = 1$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình về dạng

$$\log\frac{3^x - 1}{6} = x\left(\log\frac{10}{3} - 1\right).$$

Dẫn đến $\frac{3^x - 1}{6} = \frac{1}{3^x}$ rồi đặt $t = 3^x$ (với $t > 0$), ta có phương trình $t^2 - t - 6 = 0$ với hai nghiệm $t = 3$ và $t = -2$ (loại). Do đó $x = 1$.

b) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. Cách giải tương tự như câu a).

2.109. Với $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$ hoặc $m = 1$ thì phương trình có một nghiệm.

Với $-1 < m < 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $1 < m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm.

Hướng dẫn. Đặt $y = 3^x$ (với $y > 0$), ta có

$$(m - 3)y^2 + 2(m + 1)y - (m + 1) = 0. \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm dương của (1).

• Xét $m = 3$ thì (1) có nghiệm $y = \frac{1}{2}$ (thoả mãn $y > 0$).

• Nếu $m \neq 3$ thì $\Delta' = (m + 1)^2 + (m + 1)(m - 3) = 2(m + 1)(m - 1)$.

Đặt $\quad f(y) = (m-3)y^2 + 2(m+1)y - (m+1)$, ta có

$$(m-3)f(0) = (3-m)(m+1),$$

$$S = \frac{2(m+1)}{3-m}.$$

Lập bảng xét dấu

m	Δ'	$(m-3)f(0)$	S	Kết luận về nghiệm
	+	–	–	$y_1 < 0 < y_2$
–1	0	0	0	$y_1 = y_2 = 0$
	–	+	+	Vô nghiệm
1	0			$y_1 = y_2 = 1$
	+	+	+	$0 < y_1 < y_2$
3		0	$\Vert$	$y = \frac{1}{2}$
	+	–	–	$y_1 < 0 < y_2$

Từ đó dẫn đến kết quả.

2.110. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Hướng dẫn. Điều kiện $\cos x > 0, \ \sin x > 0$.

Đặt $\log_2 \cos x = t = \log_3 \cot^2 x$, ta có $\begin{cases} \cot^2 x = 3^t \\ \cos x = 2^t. \end{cases}$

Do $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$ nên dẫn đến $\frac{(2^t)^2}{1-(2^t)^2} = 3^t$ hay $4^t + 12^t = 3^t$.

Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ, ta tìm được $t = -1$.

Do đó $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện $\cos x > 0$, $\sin x > 0$, chỉ có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ là thích hợp.

2.111. a) Với $m > 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2m^2}{m^2 - 1}$.

Với $m \leq 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 2$, $m > 0$. Đưa về tìm nghiệm lớn hơn 2 của phương trình $x = (x-2)m^2$ hay $(1 - m^2)x = -2m^2$.

b) Với $m < \frac{5}{4}$ hoặc $m > 8$: Phương trình vô nghiệm.

Với $m = \frac{5}{4}$: phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$.

Với $m = 8$: phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$.

Với $\frac{5}{4} < m < 8$: phương trình có nghiệm $x = \varphi + k2\pi$; $x = \pi - \varphi + k2\pi$ với $\varphi = \log_2(-1 + \sqrt{m+1})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn. Đặt $2^{\sin x} = y$, vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$.

Ta có phương trình $\qquad y^2 + 2y - m = 0. \qquad (1)$

Tính được $\qquad \Delta' = 1 + m$.

- Với $m < -1$ thì (1) vô nghiệm ;
- Với $m = -1$ thì (1) có nghiệm kép $y = -1$ (loại) ;

• Với $m > -1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $y_1 = -1 + \sqrt{m+1}$ và $y_2 = -1 - \sqrt{m+1}$ (loại).

$y_1 = -1 + \sqrt{m+1}$ thoả mãn điều kiện khi

$$\begin{cases} -1 + \sqrt{m+1} \geq \dfrac{1}{2} \\ -1 + \sqrt{m+1} \leq 2 \end{cases} \text{ tức là } \begin{cases} m \geq \dfrac{5}{4} \\ m \leq 8. \end{cases}$$

Khi đó

$2^{\sin x} = -1 + \sqrt{m+1} \Leftrightarrow \sin x = \log_2(-1 + \sqrt{m+1}) = \sin\varphi \ (-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2})$.

Ta có $x = \varphi + k2\pi$; $x = \pi - \varphi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Từ đó ta đi đến kết luận trên.