§8. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

2.112. a) $(x\ ;\ y)$ là $(5\ ;\ 6)$, $(6\ ;\ 5)$.

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 0$, $y > 0$.

Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ như sau :

$$\log_2 x + \log_2 y = 1 + \log_2 15 \Leftrightarrow \log_2 xy = \log_2 30$$

$$\Leftrightarrow xy = 30.$$

b) $(x\ ;\ y) = (8\ ;\ 4)$.

Hướng dẫn. Điều kiện $x + y > 0$, $x - y > 0$.

Biến đổi phương trình thứ nhất và thứ hai trong hệ như sau :

$$\log(x^2 + y^2) = 1 + \log 8 \Leftrightarrow \log(x^2 + y^2) = \log 80 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 80.$$

$$\log(x + y) - \log(x - y) = \log 3 \Leftrightarrow \log\frac{x + y}{x - y} = \log 3 \Leftrightarrow \frac{x + y}{x - y} = 3.$$

2.113. a) $(x\ ;\ y) = (5\ ;\ 2)$.

Giải

$$\begin{cases}3^x.2^y = 972\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^x.2^y = 972\\ x-y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y+3\\ 3^{y+3}.2^y = 972\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = y+3\\ 6^y = 36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=2.\end{cases}$$

b) $(x\ ;\ y) = (20\ ;\ 5)$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ thành

$$\frac{x}{y} = 4 \text{ (với } x > 0,\ y > 0).$$

2.114. a) $(x\ ;\ y)$ là $(1\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 1)$.

Hướng dẫn. Cách 1. Rút y từ phương trình thứ hai, thế vào phương trình thứ nhất thì được $3^x + 3^{1-x} = 4$. Sau đó đặt $t = 3^x$ (với $t > 0$).

Cách 2. Viết phương trình thứ hai thành $3^{x+y} = 3$ hay $3^x.3^y = 3$. Sau đó đặt $u = 3^x$, $v = 3^y$ (với $u > 0$, $v > 0$) dẫn đến hệ $\begin{cases}u+v=4\\ uv=3.\end{cases}$

b) $(x\ ;\ y)$ là $(1\ ;\ 2)$, $(2\ ;\ 1)$.

2.115. a) $(x\ ;\ y)$ là $(\log_2 5\ ;\ \log_5 2 - \log_2 5)$, $(1\ ;\ 0)$.

Hướng dẫn. Đặt $u = 2^x$, $v = 5^{x+y}$ (với $u > 0$, $v > 0$), ta có hệ

$$\begin{cases}u+v=7\\ uv=10.\end{cases}$$

b) $(x\ ;\ y) = (2\ ;\ 1)$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ : $x \pm y > 0$. Khi đó

$$\begin{cases}x^2-y^2=3\\ \log_3(x+y)-\log_5(x-y)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3(x+y)+\log_3(x-y)=1\\ \log_3(x+y)-\dfrac{\log_3(x-y)}{\log_3 5}=1.\end{cases}$$

Tiếp theo, đặt $u = \log_3(x + y)$ và $v = \log_3(x - y)$, ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u - \dfrac{v}{\log_3 5} = 1. \end{cases}$$

2.116. a) $(x ; y)$ là $(2 ; 1)$, $\left(\sqrt{2} ; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Giải. ĐKXĐ : $x > 0, y > 0, x > y$.

Biến đổi phương trình đầu như sau :

$$\log^2 x = \log^2 y + (\log x + \log y)^2 \Leftrightarrow 2\log^2 y + 2\log x \log y = 0$$

$$\Leftrightarrow \log y(\log x + \log y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log y = 0 \\ \log x + \log y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{1}{x}. \end{array}\right.$$

• Với $y = 1$, thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\log^2(x - 1) + \log x \log 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

• Với $y = \dfrac{1}{x}$, thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\log^2\left(x - \frac{1}{x}\right) + \log x \log\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \log^2\frac{x^2 - 1}{x} - \log^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log\dfrac{x^2 - 1}{x} = \log x \\ \log\dfrac{x^2 - 1}{x} = -\log x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = x^2 \text{ (loại)} \\ \dfrac{x^2 - 1}{x} = \dfrac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = 2.$$

Kết hợp với ĐKXĐ, ta được $x = \sqrt{2}$; $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $(x ; y) = \left(\dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn. Lôgarit cơ số 10 hai vế của hai phương trình trong hệ ta được

$$\begin{cases}\log x \log 3 = \log y \log 4 \\ \log 4(\log 4 + \log x) = \log 3(\log 3 + \log y)\end{cases}$$

rồi đặt $u = \log x$, $v = \log y$.

2.117. a) $(x\ ;\ y)$ là $(3 - \sqrt{6}\ ;\ 3 + \sqrt{6})$, $(3 + \sqrt{6}\ ;\ 3 - \sqrt{6})$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ : $xy > 0$.

Áp dụng công thức $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, phương trình đầu của hệ có thể viết thành

$$(2^2)^{\log_3 xy} = 2 + 2^{\log_3 xy}.$$

Đặt $t = 2^{\log_3 xy}$ (với $t > 0$) ta có $t^2 = 2 + t$. Giải phương trình tìm được $t = -1$ (loại) và $t = 2$. Từ đó $\log_3 xy = 1$ hay $xy = 3$.

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ thành

$$(x + y)^2 - 3(x + y) - 18 = 0.$$

Giải ra, ta được $x + y = 6$ và $x + y = -3$.

Như vậy, ta có hai hệ phương trình $\begin{cases}x + y = 6 \\ xy = 3\end{cases}$ và $\begin{cases}x + y = -3 \\ xy = 3.\end{cases}$

b) $(4\ ;\ 3)$, $\left(\dfrac{1}{8}\ ;\ -2\right)$.

Hướng dẫn. Thế y từ phương trình đầu vào phương trình thứ hai rồi lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế.

2.118. a) $(x\ ;\ y) = (1\ ;\ 1)$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ : $3x \pm 2y > 0$.

Lôgarit cơ số 5 hai vế của phương trình đầu, ta được

$$\log_5(3x + 2y) + \log_5(3x - 2y) = 1.$$

Biến đổi phương trình thứ hai thành $\log_5(3x + 2y) - \dfrac{\log_5(3x - 2y)}{\log_5 3} = 1.$

Sau đó đặt $\log_5(3x + 2y) = u$, $\log_5(3x - 2y) = v$ (với $u > 0$, $v > 0$) dẫn đến hệ

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u - \dfrac{v}{\log_5 3} = 1. \end{cases}$$

b) $(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{5}\right)$.

Hướng dẫn. Điều kiện : $x > 0$, $y > 0$.

Lôgarit cơ số e hai vế của cả hai phương trình của hệ dẫn đến

$$\begin{cases} \ln x \ln 5 = \ln y \ln 6 \\ \ln 6(\ln 6 + \ln x) = \ln 5(\ln 5 + \ln y). \end{cases}$$