§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

1.59. a) *Giải*

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x^3 + 1 - 2m(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1 - 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f(x) = x^2 - x + 1 - 2m = 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1, tức là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m - 3 > 0 \\ 3 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{8} \text{ và } m \neq \frac{3}{2}.$$

1.60. a) $(1 ; -1)$.

b) Trên khoảng $(-\infty ; 1)$, $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới parabol ; trên khoảng $(1 ; +\infty)$, $(\mathscr{C})$ nằm phía trên parabol.

1.61. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$4x^3 - 3x + 3 = 2m.$$

Do đó nghiệm của phương trình đã cho là hoành độ giao điểm của đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = 4x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 2m$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 4x^3 - 3x + 3$. Từ đó dễ dàng tìm được các giá trị của m sao cho đường thẳng $y = 2m$ cắt $(\mathscr{C})$ tại đúng một điểm.

1.62. b) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot$

c) *Hướng dẫn*

Đặt $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, ta có

$$g(x) - h(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{x+1}{2}\cdot$$

• Với $x + 1 \le 0$ hay $x \le -1$, ta có $g(x) - h(x) > 0$.

• Với $x + 1 > 0$ hay $x > -1$,

$$g(x) - h(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) > h(x)$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) > h^2(x)$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x + 1) > (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 > 0.$$

Vậy $g(x) - h(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và chỉ có đẳng thức với $x = 1$.

1.63. *Hướng dẫn.* Giao điểm của các đồ thị của hai hàm số f và g là $A(1\ ;\ 2)$. Dễ thấy A thuộc đồ thị của hàm số h và các hàm số f, g, h có đạo hàm bằng nhau tại điểm $x = 1$.

1.64. Phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{C})$ là $y = x - 5$.

Hướng dẫn. Ta viết hàm số thứ hai dưới dạng

$$y = -x + 1 - \frac{2}{x-1}.$$

Hoành độ tiếp điểm của $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{C})$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + 1 - \dfrac{2}{x-1} = x^2 - 3x - 1 \\ -1 + \dfrac{2}{(x-1)^2} = 2x - 3. \end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với phương trình

$$\frac{2}{(x-1)^2} = 2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$x = 2$ cũng là nghiệm của phương trình đầu của hệ.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Do đó hai đường cong $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(2\,;\,-3)$.

1.65. *Giải*

Phương trình của đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k là

$$y = k\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}. \qquad (\mathscr{D}_k)$$

Hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng $(\mathscr{D}_k)$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3x = kx - \frac{3}{2}k - \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(k+3)x + 3k + 5 = 0.$$

Đường thẳng $(\mathscr{D}_k)$ là tiếp tuyến của parabol khi và chỉ khi phương trình trên có nghiệm kép, tức là

$$\Delta' = (k+3)^2 - 2(3k+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

Như vậy có hai tiếp tuyến của parabol đi qua điểm A. Hệ số góc của hai tiếp tuyến đó là $k_1 = 1$ và $k_2 = -1$. Vì $k_1k_2 = -1$ nên hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

1.66. *Giải*

a) Đồ thị $(\mathcal{H}_m)$ của hàm số đã cho đi qua điểm $(x_0 ; y_0)$ khi và chỉ khi

$$y_0 = \frac{mx_0 - 1}{x_0 - m}.$$

Với mọi $m \neq \pm 1$, đường cong $(\mathcal{H}_m)$ luôn đi qua điểm $(x_0 ; y_0)$ khi và chỉ khi phương trình trên (với ẩn số m) nghiệm đúng với mọi $m \neq \pm 1$. Với $m \neq \pm 1$, phương trình trên tương đương với phương trình

$$y_0(x_0 - m) = mx_0 - 1$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + y_0)m = x_0y_0 + 1.$$

Phương trình nghiệm đúng với mọi $m \neq \pm 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ x_0y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0 \\ -x_0^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình có hai nghiệm $(-1 ; 1)$ và $(1 ; -1)$.

Vậy với mọi $m \neq \pm 1$, đường cong $(\mathcal{H}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định $A(-1 ; 1)$ và $B(1 ; -1)$.

b) Tập hợp các điểm M khi m lấy các giá trị trong tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ là đường thẳng $y = x$ bỏ đi hai điểm $(-1 ; -1)$ và $(1 ; 1)$.

1.67. *Giải*

b) Hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x} = m$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - (m + 3)x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Đồ thị $(\mathscr{C})$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\Delta = (m+3)^2 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 + 6m + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m < -5 \text{ hoặc } m > -1. \qquad (2)$$

c) Khi đó, toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+3}{2} \text{ và } y_M = m. \qquad (3)$$

Từ đó suy ra

$$x_M = \frac{y_M + 3}{2} \text{ hay } y_M = 2x_M - 3.$$

Vậy điểm M nằm trên đường thẳng $y = 2x - 3$.

Từ (3) suy ra $m = 2x_M - 3$.

Từ (2), ta có

$$\left[\begin{array}{l} 2x_M - 3 < -5 \\ 2x_M - 3 > -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M < -1 \\ x_M > 1. \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m lấy các giá trị trong tập hợp $(-\infty ; -5) \cup (-1 ; +\infty)$ là phần của đường thẳng

$$y = 2x - 3 \text{ ứng với } x \in (-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty).$$

Đó là hai nửa đường thẳng.

1.68. b) Giữ nguyên phần của đồ thị $(\mathscr{C})$ nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần của đồ thị $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành, ta được đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{|x+1|}$.

c) $m > 3$.

Hướng dẫn. b) Vì $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{|x+1|} = \left|\frac{x^2 + x + 1}{x+1}\right| = |f(x)|.$$

c) Sử dụng đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$.