

§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

1.59. Cho hàm số

$$y = x^3 - 2m(x + 1) + 1.$$

- a) Với các giá trị nào của m , đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt ?
- b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.

1.60. a) Tìm giao điểm của đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ và parabol $y = x^2 - 4x + 2$.

- b) Xét vị trí tương đối của đường cong (\mathcal{C}) và parabol (tức là xác định mỗi khoảng trên đó (\mathcal{C}) nằm phía trên hoặc phía dưới parabol).

1.61. Với các giá trị nào của m , phương trình

$$4x^3 - 3x - 2m + 3 = 0$$

có một nghiệm duy nhất ?

1.62. Cho hai hàm số

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} \text{ và } g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

- a) Chứng minh rằng đồ thị (\mathcal{P}) của hàm số f và đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số g tiếp xúc với nhau tại điểm A có hoành độ $x = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung (\mathcal{D}) của (\mathcal{P}) và (\mathcal{C}) tại điểm A .

c) Chứng minh rằng (\mathcal{P}) nằm phía dưới đường thẳng (\mathcal{D}) và (\mathcal{C}) nằm phía trên (\mathcal{D}).

1.63. Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số

$$f(x) = x^2 - 3x + 4, g(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ và } h(x) = -4x + 6\sqrt{x}$$

tiếp xúc với nhau tại một điểm.

1.64. Chứng minh rằng parabol (\mathcal{P}) có phương trình

$$y = x^2 - 3x - 1$$

tiếp xúc với đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số

$$y = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x - 1}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của parabol (\mathcal{P}) và đường cong (\mathcal{C}) tại tiếp điểm của chúng.

1.65. Chứng minh rằng có hai tiếp tuyến của parabol $y = x^2 - 3x$ đi qua điểm

$A\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và chúng vuông góc với nhau.

1.66. Cho hàm số

$$y = \frac{mx - 1}{x - m}, \quad m \neq \pm 1.$$

Gọi (\mathcal{H}_m) là đồ thị của hàm số đã cho.

a) Chứng minh rằng với mọi $m \neq \pm 1$, đường cong (\mathcal{H}_m) luôn đi qua hai điểm cố định A và B .

b) Gọi M là giao điểm của hai đường tiệm cận của (\mathcal{H}_m). Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

1.67. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}.$$

b) Với các giá trị nào của m , đồ thị (\mathcal{C}) cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt A và B ?

c) Tìm tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m thay đổi.

1.68. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (\mathcal{C}) của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

b) Từ đồ thị (\mathcal{C}) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{|x + 1|}.$$

c) Với các giá trị nào của m , phương trình

$$\frac{x^2 + x + 1}{|x + 1|} = m$$

có bốn nghiệm phân biệt ?