## §9. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

**2.119.** a) $(-\infty ; 1) \cup (2 ; +\infty)$.

b) $\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{55}{34}\right]$.

*Giải*. Ta phải có $\log_{0,8} \dfrac{2x+1}{x+5} \geq 2 = \log_{0,8}(0,8)^2$. (1)

Vì hàm số lôgarit cơ số 0,8 là hàm số nghịch biến nên

$$(1) \Leftrightarrow 0 < \frac{2x+1}{x+5} \leq (0,8)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+5} > 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+5} - 0,64 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \text{ hoặc } x > -\dfrac{1}{2} ; \\ -5 < x \leq \dfrac{55}{34}. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq \frac{55}{34}.$$

c) $(-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty)$.

d) $(2 ; 4]$.

**2.120.** a) $2 - 2\sqrt{3} < m < 2 + 2\sqrt{3}$.

*Hướng dẫn.* $x^2 - mx + m + 2 > 0$ với mọi $x$, dẫn đến $\Delta = m^2 - 4m - 8 < 0$.

b) $m > \frac{2}{3}$.

*Hướng dẫn.* Dẫn đến giải $x^2 - 2x + 3m > 1$ với mọi $x$.

c) $m > \frac{7}{3}$.

*Giải*

Hàm số $y = \log_2 \log_3\left[(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m\right]$ xác định với mọi $x$ khi và chỉ khi $\log_3\left[(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m\right] > 0$ với mọi $x$, tức là

$$(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m - 1 > 0 \text{ với mọi } x. \qquad (1)$$

+ Với $m = 2$ (không thoả mãn).

+ Với $m \neq 2$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -3m + 7 < 0 \\ a = m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{7}{3} \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}.$$

**2.121.** a) $x > -2{,}5$ ; b) $x < -\frac{1}{3}$ ; c) $2 < x < 3$ ; d) $x > 4$.

*Hướng dẫn.* d) Do $6^{2x+3} = 3^{2x+3}.2^{2x+3}$ nên ta có

$$6^{2x+3} < 2^{x+7}.3^{3x-1} \Leftrightarrow 2^{x-4}.3^{-x+4} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} < \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4.$$

**2.122.** a) $x > \frac{31}{5}$ ;

b) $x \leq -1$ hoặc $x > 1$ ;

c) $x > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ hoặc $-2{,}5 < x < \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ ;

d) $x > 0$.

*Hướng dẫn*. Sử dụng tính chất của hàm số lôgarit

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2\frac{1+2x}{1+x}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < \log_2\frac{1+2x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1+2x}{1+x} < 2.$$

• Từ $\dfrac{1+2x}{1+x} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1+2x}{1+x} - \dfrac{2(1+x)}{1+x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{1+x} < 0 \Leftrightarrow x > -1.$ (1)

• Từ $\dfrac{1+2x}{1+x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 0.$ (2)

Kết hợp (1) và (2), ta được $x > 0$.

**2.123.** a) $x < \log_3 4$.

*Hướng dẫn*. Đặt $3^x = t$ (với $t > 0$), ta có $t^2 < 3t + 4$.

b) $x > 0$.

*Hướng dẫn*. Đặt $3^x = t$ (với $t > 0$), ta có $t^2 + 8t - 9 > 0$.

c) $\dfrac{1}{243} < x < 3$.

*Hướng dẫn*. Lôgarit cơ số 3 cả hai vế của bất phương trình, ta có

$$(\log_3 x + 4)\log_3 x < 5.$$

Đặt $\log_3 x = t$, ta được $t^2 + 4t - 5 < 0$ hay $-5 < t < 1$.

Do đó $-5 < \log_3 x < 1$. Suy ra $3^{-5} < x < 3$.

d) $x \le \dfrac{1}{4}$ hoặc $x \ge 2$.

*Hướng dẫn*. Đặt $\log_2 x = t$, ta có $t^2 + t - 2 \ge 0$.

**2.124.** a) $0 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

*Hướng dẫn*. Nhận xét $\log_{\frac{x}{3}} 3 = \dfrac{1}{\log_3\dfrac{x}{3}} = \dfrac{1}{\log_3 x - 1}$ rồi đặt $\log_3 x = t$,

ta có $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t-1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{t(t-1)} < 0 \Leftrightarrow t > 1$ hoặc $t < 0$.

• Với $t > 1$ thì $\log_3 x > 1$ nên $x > 3$ ;

• Với $t < 0$ thì $\log_3 x < 0$ nên $0 < x < 1$.

b) $-3 - \sqrt{65} \le x < -4$ hoặc $-2 < x \le -3 + \sqrt{65}$.

c) $x > 1$.

*Hướng dẫn.* Điều kiện : $x > \dfrac{1}{3}$, ta có : $\log_2 \dfrac{x(3x-1)}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 > 0$.

d) $x > -1$. *Hướng dẫn.* Đặt $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = t$ (với $t > 0$), ta có $t^2 - t - 2 < 0$.

**2.125.** a) $x < \dfrac{1}{16}$ hoặc $\dfrac{1}{8} < x \le \dfrac{1}{4}$ hoặc $\dfrac{1}{2} \le x < 1$.

*Hướng dẫn.* Đưa về cùng lôgarit cơ số 4.

$$3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 x + 1} + \frac{3}{\log_4 x + 2} \le 0.$$

Đặt $\log_4 x = t$, ta có $\dfrac{3}{t} + \dfrac{2}{t+1} + \dfrac{3}{t+2} \le 0$.

Dẫn đến $\dfrac{8t^2 + 16t + 6}{t(t+1)(t+2)} \le 0$. Do đó $t < -2$ hoặc $-\dfrac{3}{2} \le t < -1$ hoặc $-\dfrac{1}{2} \le t < 0$.

Từ đó ta có kết quả như trên.

b) $x < -2$ hoặc $1 < x < 2$.

*Hướng dẫn.* Trước hết đưa về cùng lôgarit cơ số 4, sau đó đưa về cùng lôgarit cơ số 3, rồi đặt $t = \log_3 \dfrac{x-1}{x+1}$, ta sẽ có bất phương trình $\dfrac{t^2-1}{t} < 0$.