ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.126. a) Chọn (B) ; b) Chọn (C) ; c) Chọn (D).

2.127. a) Chọn (B), vì $\log_{a^3} a = \frac{1}{3} \log_a a = \frac{1}{3}$.

b) Chọn (C), vì $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 4^2} = 16$.

c) Chọn (B), vì $a^{4\log_{a^2} 5} = a^{2\log_a 5} = a^{\log_a 5^2} = 5^2$.

2.128. Chọn (D), vì

$$\log_2 7 = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} 2} = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} 12 - \log_{12} 6} = \frac{b}{1-a}.$$

2.129. a) Chọn (B), vì

$$\log 9000 = \log 9 + \log 1000 = 2\log 3 + 3 = 2a + 3.$$

b) Chọn (C), vì

$$\frac{1}{\log_{81} 100} = \frac{\log 81}{\log 100} = \frac{4\log 3}{2} = \frac{4a}{2} = 2a.$$

2.130. a) Đúng, vì $\log_2 5 > \log_2 1 = 0$.

b) Sai, vì $\log_{0,2} 0,8 > \log_{0,2} 1 = 0$.

c) Sai, vì $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7} < \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$.

d) Đúng, vì $\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3} > 0 > -\log_4 3 = \log_4 \frac{1}{3}$.

Hoặc có thể giải thích $\log_3 4 > \log_3 3 = 1 = \log_4 4 > \log_4 \frac{1}{3}$.

2.131. a) $A = 53$; b) $B = -3$.

2.132. Từ $a^2 + 9b^2 = 10ab$ ta có $(a - 3b)^2 = 4ab$.

Lôgarit cơ số 10 hai vế, ta được

$$\log(a-3b)^2 = \log 4ab$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\log(a-3b) = \log 4 + \log ab$$

$$\Leftrightarrow \quad \log(a-3b) - \log 2 = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

2.133. a) $y' = 3e^{3x+1}\cos 2x - 2e^{3x+1}\sin 2x$; b) $y' = \dfrac{3x^2}{2(x^3-1)}$;

c) $y' = \dfrac{2x + e^x}{(x^2 + e^x)\ln 2}$; d) $y' = 5^{\cos x + \sin x}.(-\sin x + \cos x)\ln 5$.

2.134. a) Do $\log_a \dfrac{b}{c} = -\log_a \dfrac{c}{b}$ nên $\log_a^2 \dfrac{b}{c} = \log_a^2 \dfrac{c}{b}$;

b) $\log_a b \log_b c \log_c a = \log_b c \log_c a^{\log_a b} = \log_b c \log_c b = 1$;

c) Từ câu a) suy ra

$$\log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{c}{b} = \log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{b}{c} \ ; \ \log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{a}{c} = \log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{c}{a} \ ; \ \log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{b}{a} = \log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{a}{b}.$$

Do đó $\log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{c}{b}.\log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{a}{c}\log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{b}{a} = \log_{\frac{a}{b}}^2 \frac{b}{c}\log_{\frac{b}{c}}^2 \frac{c}{a}\log_{\frac{c}{a}}^2 \frac{a}{b} = 1.$

Vì vậy suy ra điều cần chứng minh.

2.135. a) $x = 10$.

Hướng dẫn. Đưa cả hai vế về luỹ thừa cùng cơ số 3.

b) $x = 2$.

Hướng dẫn. Đặt $t = 2^{\sqrt{x^2+5}-x}$ (với $t > 0$), ta có $t^2 - 4t + 4 = 0$.

c) $x = 2005$ và $x = 2006$.

Hướng dẫn. Nhận xét $x = 2005$ và $x = 2006$ là hai nghiệm, rồi chứng tỏ không còn nghiệm nào khác như sau :

- Với $x < 2005$ hoặc $x > 2006$, dễ thấy vế trái lớn hơn vế phải.
- Với $2005 < x < 2006$ thì $0 < |2005 - x| < 1$, $0 < |2006 - x| < 1$.

Do đó $\quad |2005 - x|^{2006} < |2005 - x| = x - 2005$;

$$|2006 - x|^{2005} < |2006 - x| = 2006 - x.$$

Dẫn đến vế trái nhỏ hơn vế phải.

d) $x = 0$.

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si chỉ ra vế trái không nhỏ hơn 2, còn dễ thấy vế phải không lớn hơn 2.

2.136. a) $x = 4$, $x = 12$.

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cơ số 2.

b) $x = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cơ số 5.

c) $x = 3$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ : $4 > x > -3$ và $x \neq -2$.

Đưa về lôgarit cơ số 2, chú ý ĐKXĐ để đối chiếu và chọn đáp số.

d) $x = 100$. *Hướng dẫn*. Nhận xét $x^{\log 7} = 7^{\log x}$.

2.137. a) $(x ; y) = (3 ; 2)$.

Hướng dẫn. Biến đổi hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases} 5^x.2^y = 500 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x.2^{2x-4} = 500 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20^x = 20^3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

b) $(x ; y) = \left(\frac{1}{3} ; \sqrt{3}\right)$; $(x ; y) = (27 ; 3\sqrt{3})$.

Hướng dẫn. Đưa về cùng lôgarit cơ số 3, ta có

$$\begin{cases} \log_{27} xy = 3\log_{27} x.\log_{27} y \\ \log_3 \dfrac{x}{y} = \dfrac{3\log_3 x}{4\log_3 y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = \log_3 x \log_3 y \\ \log_3 x - \log_3 y = \dfrac{3\log_3 x}{4\log_3 y}. \end{cases}$$

Rồi đặt $u = \log_3 x$, $v = \log_3 y$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} u + v = uv \\ u - v = \dfrac{3u}{4v}. \end{cases}$

2.138. a) $16 < x < 256$.

Hướng dẫn

Cách 1. $\left|\log_4 x - 3\right| < 1 \Leftrightarrow \left(\log_4 x - 3\right)^2 < 1 \Leftrightarrow \log_4^2 x - 6\log_4 x + 8 < 0$

$$\Leftrightarrow 2 < \log_4 x < 4 \Leftrightarrow 16 < x < 256.$$

Cách 2. $\left|\log_4 x - 3\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_4 x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < \log_4 x < 4$

$$\Leftrightarrow 16 < x < 256.$$

b) $x > 3$ hoặc $0 < x < 2$.

Hướng dẫn. Biến đổi bất phương trình về dạng

$$(\log_2 x - 1)(1 - \log_3 x) < 0.$$

Xảy ra hai trường hợp

- $\begin{cases} \log_2 x - 1 > 0 \\ 1 - \log_3 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

- $\begin{cases} \log_2 x - 1 < 0 \\ 1 - \log_3 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

c) $x < 2$. *Hướng dẫn.* Chia cả hai vế của bất phương trình cho 15^{2x+3}.

d) Với $a > 1$ thì $x > a^2$;

Với $0 < a < 1$ thì $0 < x < a^2$.

Hướng dẫn. Đặt $\log_a x = t$ (với $t \neq 2$), ta có $\dfrac{t^2 + t + 2}{t - 2} > 1 \Leftrightarrow t > 2$, tức là $\log_a x > 2$. Sau đó xét hai khả năng $a > 1$, $0 < a < 1$.