ÔN TẬP CHƯƠNG IV

4.38. (C). **4.39.** (B). **4.40.** (A).

4.41. (C). **4.42.** (B).

4.43. *Giải*. Vì $\alpha \neq 0,\ z' = \alpha z + \beta \Leftrightarrow z = \dfrac{z' - \beta}{\alpha}$, từ đó

$$|z - z_0| \leq R \Leftrightarrow \left|\frac{z' - \beta}{\alpha} - z_0\right| \leq R \Leftrightarrow |z' - (\alpha z_0 + \beta)| \leq R|\alpha|.$$

Vậy tập hợp cần tìm là hình tròn (kể cả đường tròn biên) với tâm là điểm biểu diễn số $\alpha z_0 + \beta$, với bán kính bằng $R|\alpha|$.

4.44. *Giải*. $z_1 \neq z_2$ thì $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo $\Leftrightarrow \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \overline{\left(\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = 0$

$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = 0$

$\Leftrightarrow 2(z_1\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2) = 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

4.45. *Hướng dẫn*. a) Từ $\alpha = a + ib,\ z = x + iy\ (a, b, x, y \in \mathbb{R})$ nên

$$\overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} = k \Leftrightarrow ax + by = \frac{k}{2}.$$

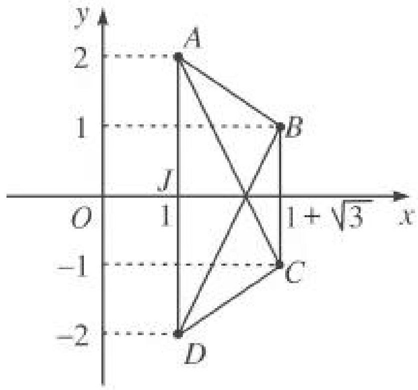
b) Chọn $a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{3}$ (tức $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}i$), $k = 2$ (không duy nhất).

4.46. *Giải*. a) $|2i - 2\overline{z}| = |2z - 1| \Leftrightarrow |i - \overline{z}| = \left|z - \dfrac{1}{2}\right| \Leftrightarrow |z + i| = \left|z - \dfrac{1}{2}\right|$.

Tập hợp cần tìm là đường trung trực của đoạn thẳng nối các điểm biểu diễn các số $-i$ và $\dfrac{1}{2}$.

b) $|2iz - 1| = 2|z + 3| \Leftrightarrow \left|iz - \dfrac{1}{2}\right| = |z + 3| \Leftrightarrow \left|z + \dfrac{i}{2}\right| = |z + 3|$. Tập hợp cần tìm là đường trung trực của đoạn thẳng nối các điểm biểu diễn các số $-\dfrac{i}{2}$ và -3.

4.47. *Giải*. Vì mỗi cặp số $1 + 2i, 1 - 2i$ và $1 + \sqrt{3} + i$, $1 + \sqrt{3} - i$ là cặp số phức liên hợp nên hai điểm A, D, hai điểm B, C đối xứng qua Ox ; phần thực của hai số đầu khác phần thực của hai số sau nên $ABCD$ là một hình thang cân, do đó nó là một tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm J nằm trên trục đối xứng Ox ; J biểu diễn số thực x sao cho $|\overrightarrow{JA}| = |\overrightarrow{JB}|$ $\Leftrightarrow |1 - x + 2i| = |1 - x + \sqrt{3} + i|$. Từ đó suy ra $x = 1$.



Hình 4.13

(Cách khác : $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} - i$, $\overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} + 3i$ mà $\dfrac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} - i} = \sqrt{3}i$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = 0$. Tương tự (hay vì lí do đối xứng qua Ox), $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AC} = 0$. Từ đó suy ra AD là một đường kính của đường tròn đi qua A, B, C, D) (h.4.13).

4.48. $z = 2 - 2i$.

Hướng dẫn. Nếu viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $\left|\dfrac{z - 1}{z - 3}\right| = 1 \Leftrightarrow x = 2$. Khi đó

$$\left|\frac{z - 2i}{z + i}\right| = \frac{\sqrt{4 + (y - 2)^2}}{\sqrt{4 + (y + 1)^2}} = 2 \Leftrightarrow y = -2.$$

Vậy $z = 2 - 2i$.

4.49. *Giải*. Xét hệ phương trình $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 & (1) \\ z^2(\overline{w})^4 = 1. & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $z^6(\overline{w})^{12} = 1$.

Từ (1) suy ra $z^6 = w^{10}$.

Vậy $w^{10}(\overline{w})^{12} = 1$. Từ đó $|w|^{22} = 1$ tức là $|w| = 1$; suy ra $|z^6| = |w|^{10} = 1$ tức là $|z| = 1$.

Từ $w = \dfrac{1}{\overline{w}}$ và $w^{10}(\overline{w})^{12} = 1$ suy ra $(\overline{w})^2 = 1$ nên w bằng 1 hoặc bằng -1.

Từ $(\overline{w})^2 = 1$ và (2) suy ra $z^2 = 1$ tức z bằng 1 hoặc bằng -1.

Để ý đến (1) suy ra hệ có hai nghiệm là $(1 ; -1)$ và $(-1 ; 1)$.

4.50. Với $z \neq i$ thì $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}$ là số thực khi và chỉ khi $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i} = \dfrac{\overline{z}-i}{z-i}$ tức là khi và chỉ khi $z^2 = \overline{z}^2$ mà $z^2 - (\overline{z})^2 = (z + \overline{z})(z - \overline{z}) = 0$ khi và chỉ khi $z = \overline{z}$ hoặc $z = -\overline{z}$. Vậy tập hợp cần tìm là tập hợp các điểm thuộc Ox và các điểm thuộc Oy khác điểm I (biểu diễn số i).

(Cách khác : Viết $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), tìm phần ảo của $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}$ rồi cho phần ảo đó bằng 0).

4.51. a) $a = 2$, $b = 2$.

Các nghiệm là $i, -i, -1+i, -1-i$.

4.52. *Giải*. Phần ảo của số phức $(1 + i\tan a)(1 + i\tan b)(1 + i\tan c)$ bằng

$$\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c.$$

Vậy $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$ khi và chỉ khi phần ảo của số phức đang xét bằng 0, tức là acgumen của số phức đó là một bội nguyên của π.

Mặt khác, $1+i\tan a=\dfrac{1}{\cos a}(\cos a+i\sin a)$ có acgumen là $a+l\pi$ (l là số nguyên bất kì) ; tương tự cho $1+i\tan b, 1+i\tan c$. Vậy

$(1+i\tan a)(1+i\tan b)(1+i\tan c)$ có acgumen là $a+b+c+m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$.

Kết luận : $\tan a+\tan b+\tan c=\tan a\tan b\tan c \Leftrightarrow a+b+c=k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

4.53. *Giải*. a) Do $\dfrac{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}=-i\tan\dfrac{\varphi}{2}$ nên :

Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}=0$, số đó không có dạng lượng giác xác định.

Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}>0$, dạng lượng giác của nó là

$$\tan\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}<0$, dạng lượng giác của nó là

$$\left(-\tan\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

b) $(1-\cos\varphi-i\sin\varphi)(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)\ =\ 2\sin\varphi(\sin\varphi-i\cos\varphi)$

$$=\ 2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Khi $\sin\varphi=0$, nó không có dạng lượng giác xác định.

Khi $\sin\varphi>0$, dạng trên là dạng lượng giác của nó.

Khi $\sin\varphi<0$, dạng lượng giác của nó là :

$$(-2\sin\varphi)\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

4.54. *Giải*. a) Đặt $\alpha=\cos a+i\sin a$, $\beta=\cos b+i\sin b$ thì

$$S+iT=[\cos b+i\sin b]+[\cos(a+b)+i\sin(a+b)]$$
$$+\ [\cos(2a+b)+i\sin(2a+b)]+\ldots+[\cos(na+b)+i\sin(na+b)]$$

$$= \beta + \beta\alpha + \beta\alpha^2 + ... + \beta\alpha^n$$

$$= \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^n)$$

$$= \beta\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \text{ (để ý rằng } \alpha \neq 1 \text{ do } \sin\frac{a}{2} \neq 0)$$

$$= \beta\frac{1-\cos(n+1)a - i\sin(n+1)a}{1-\cos a - i\sin a}$$

$$= \beta\frac{\sin\frac{n+1}{2}a\left(\sin\frac{n+1}{2}a - i\cos\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2} - i\cos\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \beta\frac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\left[\sin\frac{n+1}{2}a - i\cos\frac{n+1}{2}a\right]\left[\sin\frac{a}{2} + i\cos\frac{a}{2}\right]$$

$$= \frac{\beta\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\left(\cos\frac{na}{2} + i\sin\frac{na}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\left(\cos\frac{na}{2} + i\sin\frac{na}{2}\right)(\cos b + i\sin b)$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\left[\cos\left(\frac{na}{2} + b\right) + i\sin\left(\frac{na}{2} + b\right)\right].$$

Từ đó suy ra : $$S = \frac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{na}{2} + b\right),$$

$$T = \frac{\sin\frac{n+1}{2}a}{\sin\frac{a}{2}}\sin\left(\frac{na}{2} + b\right).$$

Chú ý. Trong phần lượng giác ở lớp 11 đã có bài tập tương tự nhưng được giải bằng cách khác.

b) Giải bằng phương pháp tương tự như ở câu a).

4.55. a) $z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, $z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$,

$z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$, $z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$.

Từ đó theo công thức Moa-vrơ, 1, z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^5 - 1 = 0$ (đó là tất cả các nghiệm vì phương trình có bậc 5).

Rõ ràng

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_1 + \overline{z}_1 = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

b) Với $z \neq 0$, $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1\right)$

$= z^2\left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1\right) = z^2(w^2 + w - 1)$, trong đó $w = z + \frac{1}{z}$.

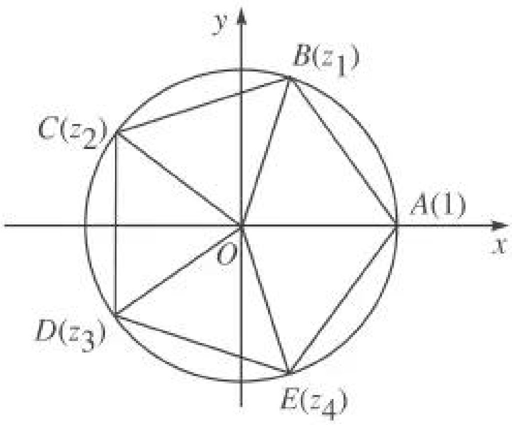
Phương trình $w^2 + w - 1 = 0$ có hai nghiệm là $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vì z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ tức là nghiệm của phương trình

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

và $z_4 = \overline{z}_1 = \frac{1}{z_1}, z_3 = \overline{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ nên

$z_1 + \frac{1}{z_1}$, $z_2 + \frac{1}{z_2}$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $w^2 + w - 1 = 0$.



Hình 4.14

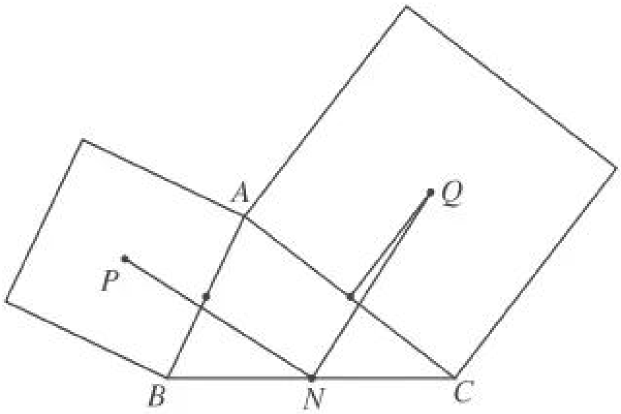
Từ đó dễ suy ra $2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (còn $2\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$) để ý rằng $\cos\frac{2\pi}{5}>0$, $\cos\frac{4\pi}{5}<0$ (h.4.14.).

4.56. *Giải*. a) M là điểm biểu diễn số phức z, M' là điểm biểu diễn số phức z'.

Khi M trùng với A tức $z=\omega$ thì $z'=\omega$ nên A biến thành chính nó. Khi M không trùng với A thì $|\overrightarrow{AM'}|=|z'-\omega|=|i||z-\omega|=|z-\omega|=|\overrightarrow{AM}|$ và một acgumen của $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=i$ là số đo góc lượng giác (AM, AM') nên góc này là $\frac{\pi}{2}$.

Từ đó phép biến đổi đang xét là phép quay tâm A, góc quay $\frac{\pi}{2}$.

b) (h.4.15) Giả sử ta đi dọc chu vi tam giác ABC theo ngược chiều quay kim đồng hồ. Khi đó, Q là ảnh của C qua phép quay tâm là trung điểm của CA góc quay $\frac{\pi}{2}$ nên nếu kí hiệu q là số phức biểu diễn bởi điểm Q thì theo câu a) ta có



Hình 4.15

$$q-\frac{\gamma+\alpha}{2}=i\left(\gamma-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right),$$

từ đó

$$q=\frac{1}{2}[(1+i)\gamma+(1-i)\alpha].$$

Đổi α thành β, γ thành α, ta suy ra số p biểu diễn bởi P là

$$p=\frac{1}{2}[(1+i)\alpha+(1-i)\beta].$$

Vậy $\overrightarrow{NP}$ biểu diễn số phức $p-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=\frac{1}{2}[(1+i)\alpha-i\beta-\gamma]$ và $\overrightarrow{NQ}$ biểu diễn số phức $q-\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=\frac{1}{2}[(1-i)\alpha-\beta+i\gamma]$. Rõ ràng $i.\frac{1}{2}[(1-i)\alpha-\beta+i\gamma]=\frac{1}{2}[(1+i)\alpha-i\beta-\gamma]$, nên suy ra $NQ=NP$ và $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{NP}$ vuông góc (h.4.15).