ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi bài tập từ 4.38 *đến* 4.42, *hãy chọn một phương án trong bốn phương án đã cho để được khẳng định đúng.*

4.38. Với mọi số ảo z, số $z^2 + |z|^2$ là :

(A) Số thực dương ; (B) Số thực âm ;

(C) Số 0 ; (D) Số ảo khác 0.

4.39. Nếu $|z| = 1$ thì $\dfrac{z^2 - 1}{z}$

(A) Lấy mọi giá trị phức ; (B) Là số ảo ;

(C) Bằng 0 ; (D) Lấy mọi giá trị thực.

4.40. Tập hợp các nghiệm phức của phương trình $z^2 + |z|^2 = 0$ là :

(A) Tập hợp mọi số ảo ; (B) $\{\pm i ; 0\}$;

(C) $\{-i ; 0\}$; (D) $\{0\}$.

4.41. Nếu một acgumen của số phức $z \neq 0$ là φ thì số phức $\left(-\frac{z}{\overline{z}^2}\right)$ có một acgumen là :

(A) $-\varphi$; (B) $-\varphi + \pi$;

(C) $3\varphi + \pi$; (D) $\varphi + \pi$.

4.42. Nếu một acgumen của số phức $z \neq 0$ là φ thì số phức iz^2 có một acgumen là

(A) -2φ ; (B) $2\varphi + \frac{\pi}{2}$;

(C) $\varphi + \pi$; (D) $-2\varphi + \frac{\pi}{2}$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

4.43. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số $z' = \alpha z + \beta$ trong đó z là số phức tuỳ ý thoả mãn $|z - z_0| \leq R$ (z_0, $\alpha \neq 0$, β là những số phức cho trước, R là số thực dương cho trước).

4.44. Chứng minh rằng hai số phức phân biệt z_1, z_2 thoả mãn điều kiện $|z_1| = |z_2|$ khi và chỉ khi $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo.

4.45. a) Cho số phức $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khác 0. Chứng minh rằng tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) sao cho $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = k$ (k là số thực cho trước) là một đường thẳng.

b) Tìm α và k trong câu a) để đường thẳng nói trên đi qua các điểm biểu diễn số 2 và $3i$.

4.46. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) $|2i - 2\overline{z}| = |2z - 1|$; b) $|2iz - 1| = 2|z + 3|$.

4.47. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$1+2i, \qquad 1+\sqrt{3}+i, \qquad 1+\sqrt{3}-i, \qquad 1-2i.$$

Chứng minh rằng $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Hỏi tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào ?

4.48. Tìm số phức z thoả mãn đồng thời

$$\left|\frac{z-1}{z-3}\right| = 1 \text{ và } \qquad \left|\frac{z-2i}{z+i}\right| = 2.$$

4.49. Giải hệ phương trình hai ẩn phức z, w sau : $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2(\overline{w})^4 = 1. \end{cases}$

4.50. Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\dfrac{z+i}{\overline{z}+i}$ là số thực.

4.51. Tìm những số thực a, b để có phân tích

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = (z^2+1)(z^2+az+b),$$

rồi giải phương trình sau trên $\mathbb{C}$

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0.$$

4.52. Cho a, b, c là ba số thực sao cho $\cos a.\cos b.\cos c \neq 0$. Tìm phần ảo của số phức

$$(1+i\tan a)(1+i\tan b)(1+i\tan c)$$

rồi từ đó suy ra rằng với ba số a, b, c như thế thì :

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

khi và chỉ khi $a+b+c = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

4.53. Viết dạng lượng giác của các số phức

a) $\dfrac{1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}$; b) $[1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)](1+\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

4.54. a) Cho các số thực a, b sao cho $\sin\frac{a}{2} \neq 0$.

Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, xét các tổng

$$S = \cos b + \cos(a+b) + \cos(2a+b) + ... + \cos(na+b),$$

$$T = \sin b + \sin(a+b) + \sin(2a+b) + ... + \sin(na+b).$$

Tính $S + iT$, từ đó suy ra S và T.

b) Chứng minh rằng với mỗi số thực $a \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), mỗi số nguyên $n \geq 1$,

ta có : $$\sin a + \sin 3a + ... + \sin(2n-1)a = \frac{\sin^2 na}{\sin a},$$

$$\cos a + \cos 3a + ... + \cos(2n-1)a = \frac{\sin 2na}{2\sin a}.$$

5.55. Trong mặt phẳng phức xét ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn đơn vị, A là điểm biểu diễn số 1 (giả sử đi dọc chu vi đa giác theo ngược chiều quay kim đồng hồ gặp các đỉnh kế tiếp B, C, D, E). Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là các số phức theo thứ tự biểu diễn bởi các điểm B, C, D, E.

a) Chứng minh rằng 1, z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $z^5 - 1 = 0$ và $z_1 + \frac{1}{z_1} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$.

b) Viết $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ rồi đưa phương trình $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ về phương trình bậc hai đối với ẩn phụ $w = z + \frac{1}{z}$.

Từ đó suy ra $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

4.56. a) Trong mặt phẳng phức cho điểm A biểu diễn số phức ω. Chứng minh rằng phép biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm biểu diễn số phức z tuỳ ý thành điểm biểu diễn số phức z' sao cho $z' - \omega = i(z - \omega)$ là phép quay tâm A góc quay $\frac{\pi}{2}$.

b) Giả sử ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số α, β, γ. Gọi P, Q theo thứ tự là tâm các hình vuông dựng bên ngoài ABC trên các cạnh AB, AC và gọi N là trung điểm của BC. Tìm các số phức biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{NP}$ rồi chứng minh rằng NQP là tam giác vuông cân.