D - NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC (3 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức

– Hiểu khái niệm bất đẳng thức.

– Nắm vững các tính chất của bất đẳng thức.

– Nắm được các bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

– Nắm vững bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số không âm.

– Nắm được bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của ba số không âm.

Về kĩ năng

– Chứng minh được một số bất đẳng thức đơn giản bằng cách áp dụng các bất đẳng thức nêu trong bài học.

– Biết cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số hoặc một biểu thức chứa biến.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Học sinh đã biết khái niệm bất đẳng thức và một số tính chất của bất đẳng thức từ các lớp dưới. Mục *Ôn tập và bổ sung tính chất của bất đẳng thức* chỉ nêu lại và bổ sung các tính chất của bất đẳng thức.

2) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Muốn chứng minh số M (hay m) là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của $f(x)$ trên D, ta làm như sau :

– Chứng minh bất đẳng thức $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$ với mọi $x \in \mathrm{D}$;

– Chỉ ra một (không cần tất cả) giá trị $x = x_0 \in \mathrm{D}$ sao cho $f(x_0) = M$ $(f(x_0) = m)$.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) *Dự kiến về phân phối thời gian*

Tiết 1 : Mục *Ôn tập và bổ sung tính chất của bất đẳng thức.*

Tiết 2 : Mục *Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối* và mục *Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân* (đối với hai số không âm).

Tiết 3 : Mục *Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân* (đối với ba số không âm).

2) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 Ta có $|a| = |a + b + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$.

Do đó $|a| - |b| \leq |a + b|$.

H2 $OD = \frac{a+b}{2}$ và $HC = \sqrt{ab}$. Vì $OD \geq HC$ nên $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Đây là cách chứng minh bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương bằng hình học.

H3 Nếu ba số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau. Nếu ba số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau.

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. Nếu $a > b$ và $ab > 0$ thì $b < a$ và $\frac{1}{ab} > 0$ nên $\frac{1}{a} = \frac{1}{ab} \cdot b < \frac{1}{ab} \cdot a = \frac{1}{b}$.

2. Gọi a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì nửa chu vi của tam giác đó là $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Ta có $p - a = \frac{a+b+c-2a}{2} = \frac{b+c-a}{2}$. Vì $b + c > a$ nên $p > a$.

Chứng minh tương tự, ta có $p > b$ và $p > c$.

3.
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a - b = b - c = c - a = 0$, tức là $a = b = c$.

4. a) Giả sử $\sqrt{2000} + \sqrt{2005} \geq \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$. Khi đó

$$\left(\sqrt{2000} + \sqrt{2005}\right)^2 \geq \left(\sqrt{2002} + \sqrt{2003}\right)^2$$

hay $\quad 2000 + 2005 + 2\sqrt{2000\,.\,2005} \geq 2002 + 2003 + 2\sqrt{2002\,.\,2003}$

nên $\sqrt{2000\,.\,2005} \geq \sqrt{2002\,.\,2003}$.

Do đó, $2000\,.\,2005 \geq 2002\,.\,2003$ hay $4\,010\,000 \geq 4\,010\,006$ (vô lí).

Vậy $\sqrt{2000} + \sqrt{2005} < \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$.

b) Giả sử $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4} \leq \sqrt{a} + \sqrt{a+6}$. Khi đó,

$$\left(\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4}\right)^2 \leq \left(\sqrt{a} + \sqrt{a+6}\right)^2$$

hay $\quad a + 2 + a + 4 + 2\sqrt{(a+2)(a+4)} \le a + a + 6 + 2\sqrt{a(a+6)}$

nên $\sqrt{(a+2)(a+4)} \le \sqrt{a(a+6)}$.

Do đó $(a+2)(a+4) \le a(a+6)$ hay $a^2 + 6a + 8 \le a^2 + 6a$ nên $8 \le 0$ (vô lí).

Vậy $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4} > \sqrt{a} + \sqrt{a+6}$ $(a \ge 0)$.

5. Với $a > 0, b > 0$ ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \ge \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0 \text{ (đúng)}.$$

6. Ta có $a^3 + b^3 \ge ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) \ge 0$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 0. \qquad (1)$$

Vì $(a-b)^2 \ge 0$ nên nếu $a \ge 0$ và $b \ge 0$ thì (1) là bất đẳng thức đúng và do đó $a^3 + b^3 \ge ab(a+b)$ cũng là bất đẳng thức đúng.

Nếu $a \ge 0$ và $b \ge 0$ thì $(a+b)(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$ hoặc $a - b = 0$, tức là $a = b$.

7. a) $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \ge 0$ (đúng).

b) $a^4 + b^4 \ge a^3b + ab^3 \Leftrightarrow a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 \ge 0$

$$\Leftrightarrow a^3(a-b) - b^3(a-b) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \ge 0 \text{ (đúng)}.$$

8. Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả thiết thêm rằng $a \ge b \ge c$. Khi đó,

$0 \le a - b < c$ nên $(a-b)^2 < c^2$, suy ra $a^2 + b^2 < c^2 + 2ab$;

$0 \le b - c < a$ nên $(b-c)^2 < a^2$, suy ra $b^2 + c^2 < a^2 + 2bc$;

$0 \le a - c < b$ nên $(a-c)^2 < b^2$, suy ra $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$.

Từ đó, ta có $2(a^2 + b^2 + c^2) < a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ và vì vậy $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

9. $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{a^3+b^3}{2} \Leftrightarrow a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 \le 2a^3 + 2b^3$

$$\Leftrightarrow a^3 - ab^2 - a^2b + b^3 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \ge 0.$$

10. a) Với $x \ge y \ge 0$ ta có

$\frac{x}{1+x} \ge \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x(1+y) \ge y(1+x) \Leftrightarrow x + xy \ge y + xy \Leftrightarrow x \ge y$ (đúng).

b) Vì $|a-b| \le |a| + |b|$ nên theo câu a) ta có

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

11. a) Nếu a, b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nên

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 2.$$

b) Nếu a, b là hai số trái dấu thì $-\frac{a}{b} + \left(-\frac{b}{a}\right) \ge 2$ và vì vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le -2$.

12. Vì $-3 \le x \le 5$ nên $x + 3$ và $5 - x$ là hai số không âm có tổng bằng 8 và do đó tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau. Do $x + 3 = 5 - x$ khi và chỉ khi $x = 1$ nên giá trị lớn nhất của $f(x) = (x+3)(5-x)$ là $f(1) = 16$.

Ta có $f(x) = (x+3)(5-x) \ge 0$ và dấu bằng xảy ra khi $x = -3$ hoặc $x = 5$ nên giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f(-3) = f(5) = 0$.

13. Vì $x > 1$ nên $x - 1$ và $\frac{2}{x-1}$ là hai số dương. Do đó

$$f(x) = x + \frac{2}{x-1} = 1 + x - 1 + \frac{2}{x-1} \ge 1 + 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}} = 1 + 2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 1 = \frac{2}{x-1}$ và $x > 1$, tức là khi $x = 1 + \sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $f(1+\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$.