D - NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức

– Hiểu rõ số đo độ, số đo rađian của cung tròn và góc, độ dài của cung tròn (hình học).

– Hiểu rằng hai tia Ou, Ov (có thứ tự tia đầu, tia cuối) xác định một họ góc lượng giác có số đo $a^{o} + k360^{o}$, hoặc có số đo $(\alpha + k2\pi)$ rad $(k \in \mathbb{Z})$. Hiểu được ý nghĩa hình học của a^{o}, α rad trong trường hợp $0 \le a < 360$ hay $0 \le \alpha < 2\pi$. Tương tự cho cung lượng giác.

Về kĩ năng

– Biết đổi số đo độ sang số đo rađian và ngược lại. Biết tính độ dài cung tròn (hình học).

– Biết mối liên hệ giữa góc hình học và góc lượng giác.

– Sử dụng được hệ thức Sa-lơ.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Về khái niệm góc, học sinh chỉ mới được học góc hình học *uOv* (góc hợp bởi hai tia *Ou*, *Ov*, không phân biệt tia đầu, tia cuối), với số đo a^o, $0 \le a \le 180$. Để dễ nói về mối liên quan giữa góc nội tiếp với "góc ở tâm" đường tròn, ta đã chuyển sang số đo cung tròn ; cung tròn có số đo a^o, $0 \le a \le 360$. Số đo cung tròn thể hiện độ lớn "góc ở tâm", "góc nhìn từ tâm" cung tròn đó. Chính số đo, độ dài cung tròn là cơ sở trực giác để xây dựng khái niệm số đo cung lượng giác ("độ dài của quỹ đạo chuyển động của điểm vạch nên cung đó").

2) Khái niệm góc, cung lượng giác khó có thể định nghĩa chính xác ở cấp THPT. Chúng ta đã dùng "chuyển động quay luôn theo một chiều" để mô tả, giới thiệu khái niệm này một cách trực giác. Nó gắn với thực tiễn chuyển động quay mà học sinh thường quan sát. Khi đó, chẳng hạn góc lượng giác có số đo $-90^o + 360^o = 270^o$ không phải là ứng với chuyển động theo chiều âm $\frac{1}{4}$ vòng (-90^o) rồi tiếp tục chuyển động theo chiều dương 1 vòng (360^o) vì góc lượng giác 270^o được hình dung là chuyển động theo chiều dương $\frac{3}{4}$ vòng. Đó là một cái khó đối với học sinh.

Chúng ta không nên quá nhấn mạnh vào định nghĩa chính xác góc, cung lượng giác. Tinh thần của SGK ở phần này là thông qua các hoạt động và ví dụ mô tả, giới thiệu dần để học sinh ngày càng hiểu tốt hơn về góc (cung) lượng giác và số đo của chúng.

Cái chính ở đây là làm học sinh hiểu được rằng kí hiệu (*Ou*, *Ov*) chỉ một trong các góc của "họ" góc lượng giác tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov*. Các góc đó có số đo $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mỗi giá trị *k* ứng với một góc của "họ". Có thể coi $0 \le \alpha < 2\pi$, khi đó, α là số đo cung tròn trên đường tròn định hướng tuỳ ý tâm *O* vạch nên bởi một điểm *M* chuyển động theo chiều dương từ *U* đến gặp *V* lần đầu tiên (*U*, *V* là các giao điểm của đường tròn đó với các tia *Ou*, *Ov*).

3) Cũng có SGK (trong nước, nước ngoài) gọi cặp tia (*Ou*, *Ov*) (*Ou* là tia đầu, *Ov* là tia cuối) là một "góc định hướng" (giữa hai tia). Khi đó, mỗi góc định hướng có vô số số đo rađian dạng $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), trong đó có số đo α, $0 \le \alpha < 2\pi$, gọi là số đo chính (giá trị chính) (cũng có sách coi α, $-\pi < \alpha \le \pi$ là số đo chính). Khi đó, hệ thức Sa-lơ trở thành đơn giản hơn : $(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow)$. Vì không muốn đi sâu vấn đề này, chúng ta vẫn giữ định nghĩa như truyền thống nói trên (xem *Bổ sung kiến thức* về góc định hướng ở mục V).

4) Ta mở đầu mục hệ thức Sa-lơ bằng cách nhắc lại khái niệm độ dài đại số của vectơ trên trục số. Điều này giúp ta dễ biểu diễn hình học các giá trị lượng giác trên các trục số.

Việc nêu qua hệ thức Sa-lơ về độ dài đại số chỉ để học sinh dễ chấp nhận hệ thức Sa-lơ về số đo góc và cung lượng giác. Hệ thức Sa-lơ, ngoài việc giúp tính toán, còn giúp hiểu thêm về góc và cung lượng giác đã được xây dựng một cách trực giác như nói trên. Tuy thế, để đơn giản, SGK không nêu cách chứng minh mà chỉ đưa ra một số bài tập nêu lên được ý nghĩa của hệ thức này (bài tập 8, 12). Về sau, hệ thức Sa-lơ còn được sử dụng để chứng minh công thức cộng (xem *Bổ sung kiến thức*).

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) Nên có đồ dùng dạy học mô phỏng đồng hồ có kim quay và sử dụng nó linh hoạt trong giảng dạy §1 này.

2) Để hiểu và khắc sâu số đo rađian, nên có thiết bị dạy học (một vành tròn, một sợi dây) để thực hiện hoạt động **H2**.

3) Trong một số bài tập tính toán (đổi số đo độ sang số đo rađian và ngược lại ; tìm số đo góc hình học khi biết số đo một góc lượng giác...), có thể hướng dẫn học sinh dùng máy tính bỏ túi.

4) *Dự kiến về phân phối thời gian*

– Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài cung tròn. Khái niệm góc lượng giác : 1 tiết.

– Khái niệm cung lượng giác, hệ thức Sa-lơ : 1 tiết.

5) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 Một hải lí bằng :

$$\frac{40000}{360}\cdot\frac{1}{60} \approx 1{,}852(km).$$

Đây là một thực tiễn liên quan đến độ dài cung tròn và đơn vị đo góc độ, phút mà nhiều học sinh chưa biết.

H2 Hoạt động này nhằm củng cố thêm trực giác về độ dài cung tròn và nhấn mạnh thêm khái niệm rađian vừa dạy cho học sinh. Nó còn gợi vấn đề đổi số đo rađian sang số đo độ (mà câu trả lời được trình bày ngay sau đó).

H3 Hai góc lượng giác còn lại có số đo $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ và $\frac{-3\pi}{2}$.

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Đúng ;

d) Đúng, để ý rằng $\pi + k2\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Trong 15 phút, mũi kim phút vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{2}$ rad nên cung đó có độ dài $\frac{\pi}{2}.1{,}75 \approx 2{,}75$ (m) và mũi kim giờ vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{24}$ rad nên cung đó có độ dài $\frac{\pi}{24}.1{,}26 \approx 0{,}16$ (m).

3. Ta có bảng sau :

Số đo độ	-60^o	-240^o	-135^o	-960^o	3100^o	2448^o
Số đo rađian	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{16\pi}{3}$	$\frac{155\pi}{9}$	$\frac{68\pi}{5}$

4. $21^o30' = \frac{21{,}5.\pi}{180} \approx 0{,}375$ (rad) ; $\quad 75^o54' = \frac{75{,}9.\pi}{180} \approx 1{,}325$ (rad) ;

$2{,}5 \text{ rad} = \left(\frac{2{,}5.180}{\pi}\right)^o \approx 143^o14'$; $\quad \frac{2}{\pi} \text{ rad} = \left(\frac{\frac{2}{\pi}.180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{360}{\pi^2}\right)^o \approx 36^o29'$.

5. Đáp số theo thứ tự là :

$\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad -\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

6. a) $\frac{22\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} = 4\pi = 2.2\pi$;

b) $645^o - (-435^o) = 1080^o = 3.360^o$.

7. Đáp số theo thứ tự là :

$180^o, -120^o, -60^o, -60^o$.

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

1. Số đo độ và grad

• Số đo độ của góc đã xuất hiện từ hồi xa xưa (Hip-pác-cơ (Hipparque), nhà thiên văn học Hi Lạp thế kỉ II trước Công nguyên đã sử dụng nó). Các thứ phân của độ được viết theo cơ số 60 ($1^o = 60'$, $1' = 60''$). Ngày nay, máy tính thường dùng các thứ phân của độ (giây) theo hệ thập phân.

• Đến thế kỉ XV xuất hiện số đo grad của góc ; góc bẹt có số đo 200 grad. Trong máy tính bỏ túi, chẳng hạn CASIO *fx − 500 MS*, có cả ba kiểu (mode) : Deg (độ), Rad (rađian), Gra (grad) về số đo góc. Nhưng hiện nay số đo grad ít được dùng.

• Cuối thế kỉ XVIII, để thống nhất đơn vị đo độ dài, người ta coi độ dài vòng kinh tuyến của Trái Đất là 40 000 km. Khi đó, $\frac{1}{4}$ vòng kinh tuyến dài 10 000 km. Nếu dùng số đo grad thì vì góc vuông có số đo 100 grad nên độ dài cung kinh tuyến ứng với góc ở tâm 1 grad là 100 km ; còn nếu dùng số đo độ thì độ dài cung kinh tuyến ứng với góc ở tâm 1^o là $\frac{10000}{90} \approx 111{,}111$ (km) và ứng với góc ở tâm $1'$ là $\frac{10000}{90.60} \approx 1{,}852$ (km) = 1 (hải lí) (xem $\boxed{\textbf{H1}}$).

2. Góc định hướng

• Có thể gọi "họ" tất cả các góc lượng giác cùng tia đầu Ou, tia cuối Ov là một *góc định hướng của cặp tia cùng gốc*. Vậy trong mặt phẳng đã định hướng (tức đã chọn chiều quay dương), một cặp tia cùng gốc (tia đầu Ou, tia cuối Ov) xác định một góc định hướng. Ta nói nó có vô số số đo dạng $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) (α là số đo một góc lượng giác tia đầu Ou, tia cuối Ov).

• Lấy vectơ $\vec{u}$ chỉ hướng tia Ou, vectơ $\vec{v}$ chỉ hướng tia Ov ($\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$) thì có thể nói đến *góc định hướng của cặp vectơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$; nó có vô số số đo dạng $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; người ta diễn tả điều đó bằng cách viết

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\ [\mathrm{mod}\ 2\pi].$$

Vậy $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\ [\mathrm{mod}\ 2\pi]$ có nghĩa là : Nếu từ điểm O, ta vạch hai tia Ou, Ov có hướng xác định theo thứ tự bởi $\vec{u}$, $\vec{v}$ thì có một góc lượng giác tia đầu Ou, tia cuối Ov có số đo α (rađian).

• Rõ ràng rằng, với mọi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$ và với mọi số $k > 0$, ta có

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0\ [\mathrm{mod}\ 2\pi] \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng},$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \pi [\mathrm{mod}\ 2\pi] \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ ngược hướng},$$

$$(k\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \text{ [mod } 2\pi],$$

$$(\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \text{ [mod } 2\pi].$$

Hệ thức Sa-lơ có thể phát biểu là : Với mọi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ khác $\vec{0}$, ta có

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \text{ [mod } 2\pi],$$

(để ý rằng α [mod 2π] + β [mod 2π] = $(\alpha + \beta)$ [mod 2π]).

Từ đó suy ra

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) \text{ [mod } 2\pi],$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = ((\vec{u}, \vec{v}) + \pi) \text{[mod } 2\pi], \quad (\vec{u}, -\vec{v}) = ((\vec{u}, \vec{v}) + \pi) \text{ [mod } 2\pi],$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \text{ [mod } 2\pi].$$

Ví dụ

1) Tính chất "Tổng ba góc trong của tam giác ABC bằng một góc bẹt" có thể được diễn tả thành

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi \text{ [mod } 2\pi]$$

và có thể được chứng minh như sau (h. 6.1) :

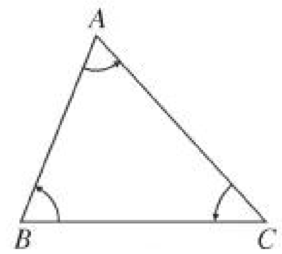
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (-\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AB})$$

$$= \pi \text{ [mod } 2\pi].$$



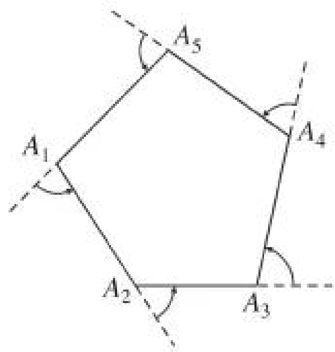
Hình 6.1

2) Tính chất "Tổng các góc ngoài của một đa giác lồi n đỉnh $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$ bằng hai góc bẹt" có thể được diễn tả và chứng minh như sau (h. 6.2) :

$$(\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) + (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) +$$

$$+ (\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}) + \ldots + (\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1}) =$$

$$= (\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_nA_1}) = 0 \text{ [mod } 2\pi].$$

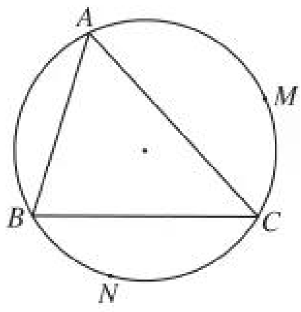


Hình 6.2

3) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ thì cung tròn với hai mút B và C chứa A (không kể hai mút B, C) là quỹ tích các điểm M trong mặt phẳng sao cho

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ [\text{mod } 2\pi]\ ;$$

còn cung tròn kia là quỹ tích các điểm N sao cho $(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}) = \pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ [mod 2π] (h. 6.3).



Hình 6.3

3. Chứng minh hệ thức Sa-lơ

Hệ thức Sa-lơ đối với cung lượng giác :

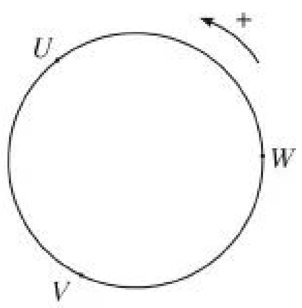
$$\text{"sđ } \overset{\curvearrowright}{UV} + \text{sđ } \overset{\curvearrowright}{VW} = \text{sđ } \overset{\curvearrowright}{UW} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\text{"},$$

có nghĩa là với ba điểm bất kì U, V, W trên đường tròn định hướng, mỗi khi xét những cung lượng giác tuỳ ý $\overset{\curvearrowright}{UV}$, $\overset{\curvearrowright}{VW}$, $\overset{\curvearrowright}{UW}$ thì có một số nguyên k để có đẳng thức nói trên.

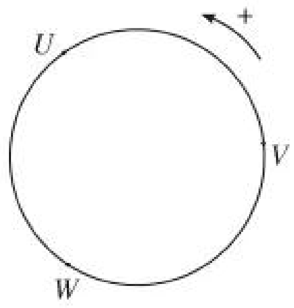
Dễ thấy rằng chỉ cần chứng minh hệ thức đó cho một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$ xác định, một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{VW}$ xác định, một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UW}$ xác định là đủ.

Rõ ràng, ta có hệ thức đó khi hai trong ba điểm U, V, W (hay cả ba điểm) trùng nhau. Còn với ba điểm U, V, W phân biệt trên đường tròn định hướng, chỉ có hai trường hợp sau :

1) Trong trường hợp 1 như ở hình 6.4, chỉ cần lấy số đo các cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$, $\overset{\curvearrowright}{VW}$, $\overset{\curvearrowright}{UW}$ gồm giữa 0 và 2π, ta được hệ thức Sa-lơ (ở đây $k = 0$) ;



Hình 6.4



Hình 6.5

2) Trong trường hợp 2 như ở hình 6.5, chỉ cần lấy số đo các cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$, $\overset{\curvearrowright}{VW}$, $\overset{\curvearrowright}{UW}$ gồm giữa -2π và 0, ta được hệ thức Sa-lơ (ở đây $k = 0$).