D - NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức

– Nắm được khái niệm mệnh đề, nhận biết được một câu có phải là mệnh đề hay không.

– Nắm được các khái niệm mệnh đề phủ định, kéo theo, tương đương.

– Biết khái niệm mệnh đề chứa biến.

Về kĩ năng

– Biết lập mệnh đề phủ định của một mệnh đề, mệnh đề kéo theo và mệnh đề tương đương từ hai mệnh đề đã cho và xác định được tính đúng - sai của các mệnh đề này.

– Biết chuyển mệnh đề chứa biến thành mệnh đề bằng cách : hoặc gán cho biến một giá trị cụ thể trên miền xác định của chúng, hoặc gán các kí hiệu $\forall$ và $\exists$ vào phía trước nó.

– Biết sử dụng các kí hiệu $\forall$ và $\exists$ trong các suy luận toán học.

– Biết cách lập mệnh đề phủ định của một mệnh đề có chứa kí hiệu $\forall$ và $\exists$.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Mệnh đề phải là một câu khẳng định có tính đúng - sai rõ ràng. Có thể chưa biết nó là đúng hay sai nhưng chắc chắn nó chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể vừa đúng, vừa sai. Chẳng hạn, câu khẳng định "Có sự sống ngoài Trái Đất" là một mệnh đề cho dù nó đúng hay sai thì đến nay ta chưa biết ; hoặc câu khẳng định "Mỗi số nguyên dương chẵn lớn hơn 2 là tổng của hai số nguyên tố" cũng là một mệnh đề cho dù đến nay nó vẫn chưa được chứng minh là đúng và cũng chưa tìm được phản ví dụ nào chứng tỏ nó sai, mệnh đề này mang tên là *Giả thuyết Gôn-bach (Goldbach).*

2) Nhấn mạnh cho học sinh rằng các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh,... không phải là một mệnh đề.

3) Phép phủ định, phép kéo theo, phép tương đương được gọi là những phép toán lôgic. Bằng cách dùng các phép toán lôgic này, ta sẽ tạo ra được những mệnh đề mới từ những mệnh đề hiện có. Mệnh đề phủ định $\overline{P}$ được tạo ra từ mệnh đề P bằng phép phủ định. Mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ được tạo ra từ hai mệnh đề đã cho P và Q bằng phép kéo theo và phép tương đương.

4) Mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ chỉ sai trong trường hợp P đúng và Q sai. Do đó, nó luôn đúng khi P sai (bất kể Q đúng hay sai), hoặc khi Q đúng (bất kể P đúng hay sai). Tuy nhiên SGK không đi sâu vào các phép toán lôgic mà chủ yếu chỉ cung cấp một số kí hiệu lôgic để áp dụng sau này.

5) Trong đời sống thực tiễn, câu "Nếu P thì Q" được sử dụng khi giữa P và Q có mối quan hệ nhân quả. Tuy nhiên, mệnh đề kéo theo (theo nghĩa toán học, lôgic hình thức) có ý nghĩa rộng hơn. Nó không nhất thiết bao hàm quan hệ nhân quả. Giả thiết P và kết luận Q có thể độc lập với nhau. Nó có thể không mang lại một thông tin có ích nào, thậm chí là một khẳng định "ngô nghê".

Tuy nhiên, nó vẫn là một mệnh đề vì nó có tính đúng - sai rõ ràng. Chẳng hạn, ta có thể lập mệnh đề "Nếu hôm nay là thứ sáu thì $2 + 3 = 5$". Mệnh đề này là đúng vì kết luận là mệnh đề đúng. Mệnh đề "Nếu hôm nay là thứ sáu thì $2 + 3 = 6$" là sai nếu ta phát biểu mệnh đề trên vào ngày thứ sáu (vì P đúng, Q sai) và đúng vào các ngày khác (do P sai). Tuy nhiên trong đời sống thực tiễn, mệnh đề trên là vô nghĩa và rất "ngô nghê".

6) Chú ý rằng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ đúng không phải bao giờ cũng có nghĩa mệnh đề Q là đúng. Chẳng hạn, mệnh đề "Nếu $1 + 1 = 4$ thì nhà thơ Xuân Diệu là nhà toán học vĩ đại" luôn là mệnh đề đúng (vì mệnh đề "$1 + 1 = 4$" là sai) nhưng mệnh đề "Nhà thơ Xuân Diệu là nhà toán học vĩ đại" là sai.

7) Mệnh đề chứa biến $P(x)$ là một câu khẳng định rằng phần tử x, nằm trong một tập hợp xác định X nào đó, có tính chất P. Khi cho x một giá trị cụ thể $x = x_0$, với $x_0 \in X$ thì $P(x_0)$ có tính đúng - sai. Do đó, $P(x_0)$ trở thành mệnh đề. Người ta cũng nói $P(x_0)$ là giá trị của mệnh đề chứa biến $P(x)$ tại $x = x_0$.

8) Kí hiệu $\forall$ còn gọi là *lượng từ "với mọi"*. Để xác định tính đúng - sai của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$", ta phải kiểm tra xem với tất cả các giá trị $x \in X$, $P(x)$ có đúng hay không. Nếu ta phát hiện được một giá trị x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ sai thì mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là sai. Nếu không có một x_0 nào như vậy thì mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là đúng.

9) Kí hiệu $\exists$ còn gọi là *lượng từ "tồn tại"*. Để xác định tính đúng - sai của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$", ta phải tìm kiếm một giá trị $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng. Nếu tìm được một giá trị như vậy thì mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là đúng. Nếu không có một giá trị nào như vậy thì mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là sai.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) *Gợi ý về phân phối thời gian.* Giáo viên dành một tiết giảng về mệnh đề (các tiểu mục 1, 2, 3, 4), dành một tiết giảng về mệnh đề chứa biến (các tiểu mục 5, 6, 7).

2) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 a) "Pa-ri không là thủ đô của nước Anh". Mệnh đề phủ định đó đúng.

b) "2002 không chia hết cho 4". Mệnh đề phủ định đó đúng.

Mục đích của hoạt động này là để cho học sinh thực hành việc lập mệnh đề phủ định của một mệnh đề và xét tính đúng - sai của mệnh đề phủ định bằng cách xét tính đúng - sai của mệnh đề ban đầu. Nếu có thời gian, giáo viên có thể cho lớp hoạt động theo cách sau : Gọi hai em lên bảng, một em phát biểu một mệnh đề, em kia phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề đó.

H2 "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì nó có hai đường chéo bằng nhau".

Mục đích của **H2** là luyện tập cho học sinh biết chuyển từ kí hiệu lôgic sang ngôn ngữ thông thường.

Giáo viên nêu các tình huống khi mệnh đề kéo theo đúng và khi mệnh đề kéo theo sai.

Có thể cho học sinh biết rằng : Nếu mệnh đề P sai thì mệnh đề $P \Rightarrow Q$ luôn đúng, bất kể mệnh đề Q đúng hay sai. Để củng cố, yêu cầu học sinh giải thích kĩ hơn ví dụ 4 : Tại sao mệnh đề "Vì 2002 là số chẵn nên 2002 chia hết cho 4" là mệnh đề sai ? (Trả lời : Vì P đúng và Q sai).

H3 a) Đây là mệnh đề tương đương. Mệnh đề này đúng vì mệnh đề "Nếu tam giác ABC có ba góc bằng nhau thì tam giác đó có ba cạnh bằng nhau" và mệnh đề "Nếu tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau thì tam giác đó có ba góc bằng nhau" đều đúng.

b) i) $P \Rightarrow Q$: "Vì 36 chia hết cho 4 và chia hết cho 3 nên 36 chia hết cho 12" ;

$Q \Rightarrow P$: "Vì 36 chia hết cho 12 nên 36 chia hết cho 4 và chia hết cho 3" ;

$P \Leftrightarrow Q$: "36 chia hết cho 4 và chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu 36 chia hết cho 12".

ii) P là mệnh đề đúng, Q là mệnh đề đúng ; $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

Mục đích để học sinh nhận biết mệnh đề tương đương và xác định được tính đúng - sai của mệnh đề tương đương.

H4 $P(2)$: "$2 > 4$" là mệnh đề sai, $P\left(\frac{1}{2}\right)$: "$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$" là mệnh đề đúng.

H5 Mệnh đề "Với mọi số nguyên n, thì $n(n+1)$ là số lẻ" là mệnh đề sai.

H6 Mệnh đề "Tồn tại số nguyên dương n để $2^n - 1$ là số nguyên tố" là mệnh đề đúng, vì với $n = 3$ thì $2^3 - 1 = 7$ là số nguyên tố.

H7 Mệnh đề phủ định là "Có một bạn trong lớp em không có máy tính".

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Không là mệnh đề (Câu mệnh lệnh) ;

b) Mệnh đề sai ;

c) Mệnh đề sai.

2. a) "Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ vô nghiệm". Mệnh đề phủ định sai.

b) "$2^{10} - 1$ không chia hết cho 11". Mệnh đề phủ định sai.

c) "Có hữu hạn số nguyên tố". Mệnh đề phủ định sai.

3. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$: "Tứ giác *ABCD* là hình vuông nếu và chỉ nếu tứ giác đó là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc" và "Tứ giác *ABCD* là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác đó là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc". Đây là mệnh đề đúng.

4. Mệnh đề $P(5)$: "$5^2 - 1$ chia hết cho 4" là mệnh đề đúng, mệnh đề $P(2)$: "$2^2 - 1$ chia hết cho 4" là mệnh đề sai.

5. a) Mệnh đề phủ định là "$\exists n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 - 1$ không là bội số của 3".

b) Mệnh đề phủ định là "$\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 \leq 0$".

c) Mệnh đề phủ định là "$\forall x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq 3$" (có nghĩa là $\sqrt{3}$ là số vô tỉ).

d) Mệnh đề phủ định là "$\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1$ là hợp số".

e) Mệnh đề phủ định là "$\exists n \in \mathbb{N}$, $2^n < n + 2$".

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

1. Bảng chân trị

Người ta quy ước một mệnh đề đúng có giá trị chân lí bằng 1, mệnh đề sai có giá trị chân lí bằng 0. Khi sử dụng các phép toán lôgic để tạo ra mệnh đề mới (gọi là mệnh đề phức hợp) từ các mệnh đề đã cho (gọi là mệnh đề thành phần) thì giá trị chân lí của mệnh đề phức hợp tuỳ thuộc vào giá trị chân lí của các mệnh đề thành phần. Để dễ nhớ, ta lập các bảng sau gọi là các *bảng chân trị*. Sau đây là bảng chân trị của các mệnh đề kéo theo và mệnh đề tương đương :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bảng chân trị của mệnh đề kéo theo

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Bảng chân trị của mệnh đề tương đương

2. Mệnh đề hội và mệnh đề tuyển

Ngoài các phép toán phủ định, kéo theo và tương đương, ta còn dùng hai phép toán lôgic khác là *phép hội và phép tuyển* để tạo ra mệnh đề mới từ các mệnh đề hiện có.

• ***Định nghĩa.*** Cho hai mệnh đề P và Q.

a) Mệnh đề "P và Q" gọi là *hội* của P và Q, kí hiệu là $P \wedge Q$. Mệnh đề hội chỉ đúng trong trường hợp cả P và Q đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại. Phép toán lôgic "$\wedge$" gọi là phép hội.

b) Mệnh đề "P hoặc Q" gọi là *tuyển* của P và Q, kí hiệu là $P \vee Q$. Mệnh đề tuyển chỉ sai trong trường hợp cả P và Q đều sai và đúng trong các trường hợp còn lại. Phép toán lôgic "$\vee$" gọi là phép tuyển.

Ví dụ

i) Giả sử P là mệnh đề "20 chia hết cho 4", Q là mệnh đề "20 chia hết cho 5". Khi đó, $P \wedge Q$ là mệnh đề "20 chia hết cho 4 và chia hết cho 5".

ii) Giả sử P là mệnh đề "81 là số chính phương", Q là mệnh đề "81 là số nguyên tố". Khi đó, $P \vee Q$ là mệnh đề "81 là số chính phương hoặc số nguyên tố".

Bảng chân trị của các mệnh đề hội và tuyển như sau :

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Bảng chân trị của mệnh đề hội

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Bảng chân trị của mệnh đề tuyển

• Các phép toán lôgic nêu trên tuân theo các luật sau (trong đó một số luật tương tự như luật của phép toán đại số).

i) Luật giao hoán

$$P \vee Q = Q \vee P \text{ ; } \qquad P \wedge Q = Q \wedge P.$$

ii) Luật kết hợp

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R) \text{ ;}$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R).$$

iii) Luật phân phối

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \text{ ;}$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

iv) Quy tắc Đờ Mooc-găng

$$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q} \text{ ; } \qquad \overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}.$$

v) $$(P \Rightarrow Q) = (\overline{P} \vee Q) \text{ ; } \quad (P \Rightarrow Q) = (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}).$$

Trong các công thức trên, dấu "=" giữa hai mệnh đề được hiểu là hai mệnh đề đó có cùng một bảng chân trị, tức là hai mệnh đề đó tương đương với nhau.

3. Mệnh đề chứa nhiều biến

Mệnh đề chứa biến có thể chứa nhiều biến. Mệnh đề chứa biến chứa n biến $x_1, x_2, ..., x_n$ với $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc một tập hợp X nào đó, là một khẳng định rằng các phần tử $x_1, x_2, ..., x_n$ có tính chất P và được kí hiệu là $P(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$. Khi ta gán cho $x_1, x_2, ..., x_n$ các giá trị xác định thuộc tập X, khẳng định $P(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$ sẽ có tính đúng - sai và trở thành mệnh đề.

Ví dụ 1

Xét mệnh đề chứa biến $R(x ; y ; z)$: "$x + y = z$" với x, y, z là những số thực. Ta thấy $R(1 ; 2 ; 3)$ là mệnh đề "$1 + 2 = 3$". Đây là mệnh đề đúng. Trong khi đó, $R(0 ; 0 ; 1)$ là mệnh đề "$0 + 0 = 1$". Đây là mệnh đề sai.

Người ta cũng có thể gán các kí hiệu $\forall$ và $\exists$ vào các mệnh đề chứa nhiều biến để chúng trở thành một mệnh đề.

Ví dụ 2

Cho mệnh đề chứa biến $P(x ; y)$: "$x + y = y + x$" với x, y là những số thực. Xét mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x ; y)$".

Mệnh đề này nêu khẳng định "Với hai số thực x và y bất kì, ta có $x + y = y + x$". Đây là khẳng định đúng. Vậy mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x\ ;\ y)$" là mệnh đề đúng.

Ví dụ 3

Cho mệnh đề chứa biến $Q(x\ ;\ y)$: "$x + y = 0$". Xét mệnh đề "$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, Q(x\ ;\ y)$".

Mệnh đề này nêu khẳng định "Tồn tại một số thực y sao cho với mọi số thực x, ta có $x + y = 0$". Vì không có một số thực y nào sao cho $x = -y$ với mọi số thực x nên khẳng định này là sai. Vậy mệnh đề "$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, Q(x\ ;\ y)$" là mệnh đề sai.

Ví dụ 4

Cho mệnh đề chứa biến $Q(x\ ;\ y)$: "$x + y = 0$" với x, y là những số thực. Xét mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, Q(x\ ;\ y)$".

Mệnh đề này nêu khẳng định "Với mọi số thực x đều tồn tại số thực y sao cho $x + y = 0$". Đây là khẳng định đúng vì ta có thể chọn $y = -x$. Vậy mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, Q(x\ ;\ y)$" là mệnh đề đúng.

Các ví dụ trên cho thấy nếu ta gán hai kí hiệu $\forall$ và $\exists$ vào một mệnh đề chứa biến thì thứ tự xuất hiện trước sau của kí hiệu $\forall$ và $\exists$ là rất quan trọng. Để xác định xem mệnh đề "$\forall x \in X, \exists y \in X, P(x\ ;\ y)$" có đúng không, ta phải xét tất cả các giá trị $x \in X$. Đối với mỗi x, ta phải tìm kiếm một giá trị $y \in X$ sao cho $P(x\ ;\ y)$ đúng. Nếu với mỗi x, ta đều tìm được một y sao cho $P(x\ ;\ y)$ đúng thì mệnh đề "$\forall x \in X, \exists y \in X, P(x\ ;\ y)$" là đúng. Nếu với một x nào đó, ta không tìm được một y nào như vậy thì mệnh đề "$\forall x \in X, \exists y \in X, P(x\ ;\ y)$" là sai.

Để xác định mệnh đề "$\exists x \in X, \forall y \in X, P(x\ ;\ y)$" có đúng không, ta làm như sau : Đối với mỗi x, ta xét tất cả các giá trị của y để xem liệu $P(x\ ;\ y)$ có đúng không. Nếu tìm được một x như vậy thì mệnh đề "$\exists x \in X, \forall y \in X, P(x\ ;\ y)$" là đúng. Nếu không tìm được x như vậy thì mệnh đề "$\exists x \in X, \forall y \in X, P(x\ ;\ y)$" là sai.

Giả sử $P(x\ ;\ y)$ là câu "$(x\ ;\ y)$ có tính chất P". Khi đó, mệnh đề phủ định của mệnh đề "Với mọi x thuộc X, tồn tại y thuộc X để $(x\ ;\ y)$ có tính chất P" là mệnh đề "Tồn tại x thuộc X sao cho với mọi y thuộc X, thì $(x\ ;\ y)$ không có tính chất P". Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Tồn tại x thuộc X để với mọi y thuộc X thì $(x\ ;\ y)$ có tính chất P" là mệnh đề "Với mọi x thuộc X, tồn tại y thuộc X để $(x\ ;\ y)$ không có tính chất P". Như vậy :

Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, \exists y \in X, P(x\ ;\ y)$" là mệnh đề

$$"\exists x \in X, \forall y \in X, \overline{P(x\ ;\ y)}".$$

Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, \forall y \in X, P(x\ ;\ y)$" là mệnh đề

$$"\forall x \in X, \exists y \in X, \overline{P(x\ ;y)}".$$