§2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức

– Hiểu rõ một số phương pháp suy luận toán học.

– Nắm vững các phương pháp chứng minh trực tiếp và chứng minh bằng phản chứng.

– Biết phân biệt được giả thiết và kết luận của định lí.

– Biết phát biểu mệnh đề đảo, định lí đảo, biết sử dụng các thuật ngữ : "điều kiện cần", "điều kiện đủ", "điều kiện cần và đủ" trong các phát biểu toán học.

Về kĩ năng

Chứng minh được một số mệnh đề bằng phương pháp phản chứng.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Thông thường, mỗi định lí là một mệnh đề đúng có cấu trúc như sau :

$$"\forall x \in X,\ P(x) \Rightarrow Q(x)". \quad (1)$$

Tuy nhiên, không phải tất cả các định lí đều có cấu trúc như trên. Chẳng hạn, định lí "Có vô số số nguyên tố" hoặc định lí "Số $2^{1092} - 1$ chia hết cho số 1093^2 " đều không có dạng (1).

Trong nhiều trường hợp, phát biểu định lí không có lượng từ "với mọi" nhưng ta phải ngầm hiểu là có lượng từ "với mọi" trong đó. Chẳng hạn, trong định lí

"Nếu n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 9", ta cần hiểu đây là cách phát biểu gọn của định lí "Với mọi số nguyên n, nếu n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 9".

Có định lí phát biểu không có dạng (1) nhưng có thể diễn đạt dưới dạng (1). Chẳng hạn, định lí "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ" có thể phát biểu dưới dạng (1) như sau : "Với mọi số thực r, nếu r là số hữu tỉ thì $r^2 - 2 \neq 0$".

2) Trong SGK 2000 (trang 10) nói rằng "Phần lớn các định lí toán học đều là những mệnh đề đúng có dạng $A \Rightarrow B$ với A, B là những mệnh đề". Điều này chưa thật chính xác. Ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 1

Xét định lí "Nếu tam giác có ba cạnh bằng nhau thì tam giác đó có ba đường cao bằng nhau". Câu P : "Tam giác có ba cạnh bằng nhau" và câu Q : "Tam giác có ba đường cao bằng nhau" *không phải là những mệnh đề mà chúng là những mệnh đề chứa biến*. Cụ thể, gọi X là tập hợp các tam giác, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến "x có ba cạnh bằng nhau", $Q(x)$ là mệnh đề chứa biến "x có ba đường cao bằng nhau". Khi đó, định lí trên có dạng "$\forall x \in X$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$" và phát biểu đầy đủ như sau "Với mọi tam giác ABC, nếu tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau thì nó có ba đường cao bằng nhau". Trên thực tế, định lí dạng "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" được phát biểu ngắn gọn là "Nếu $P(x)$ đúng thì $Q(x)$ đúng".

3) Trong phép chứng minh trực tiếp định lí dạng (1), ta cần chứng tỏ với mọi $x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ là mệnh đề đúng.

Với $x \in X$ mà $P(x)$ sai thì mệnh đề $P(x) \Rightarrow Q(x)$ đúng. Do đó chỉ cần xét $x \in X$ mà $P(x)$ đúng. Khi đó, việc chứng minh mệnh đề $P(x) \Rightarrow Q(x)$ đúng tương đương với việc chứng minh với $x \in X$ mà $P(x)$ đúng thì $Q(x)$ đúng.

4) Cơ sở lôgic của phép chứng minh phản chứng là xuất phát từ một mệnh đề đúng thì không thể suy ra một mâu thuẫn.

Chẳng hạn, để chứng minh định lí (1), ta xuất phát từ giả thiết

$$\text{"}\exists x \in X, \overline{P(x) \Rightarrow Q(x)}\text{"} \qquad (2)$$

(phủ định của mệnh đề (1)) để đi đến mâu thuẫn.

Từ đó suy ra (2) sai, do đó (1) đúng.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) Học sinh thường hay nhầm lẫn *điều kiện cần* và *điều kiện đủ*. Giáo viên cần giảng kĩ và cho học sinh thực hành nhiều. Để khắc sâu kiến thức, giáo viên cho ví dụ về một điều kiện nào đó là điều kiện đủ nhưng không là điều kiện cần hoặc là điều kiện cần nhưng không là điều kiện đủ.

Ví dụ 2

a) Điều kiện cần để một tứ giác là hình chữ nhật là tứ giác đó có hai đường chéo bằng nhau. Điều kiện cần này chưa phải là điều kiện đủ vì tứ giác có hai đường chéo bằng nhau chưa chắc là hình chữ nhật.

(Cũng có thể phát biểu : Điều kiện "tứ giác có hai đường chéo bằng nhau" là điều kiện cần để tứ giác đó là hình chữ nhật).

b) Điều kiện đủ để một tứ giác lồi nội tiếp là tứ giác đó có bốn góc bằng nhau. Điều kiện này không là điều kiện cần vì có những tứ giác nội tiếp mà không có bốn góc bằng nhau.

(Cũng có thể phát biểu : Điều kiện "tứ giác có bốn góc bằng nhau" là điều kiện đủ để tứ giác nội tiếp được).

2) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 Giả sử $3n + 2$ là số lẻ và $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Khi đó, $3n + 2 = 6k + 2 =$ $= 2(3k + 1)$ chẵn. Mâu thuẫn.

Mục đích của **H1** là tập cho học sinh lí luận bằng phản chứng.

H2 $P(n)$: "n chia hết cho 24", $Q(n)$: "n chia hết cho 8".

H3 "Điều kiện cần và đủ để một số nguyên dương n không chia hết cho 3 là n^2 chia cho 3 dư 1".

Mục đích của **H3** là thực hành cách phát biểu định lí với thuật ngữ "điều kiện cần và đủ". Căn cứ trên việc trả lời của học sinh, giáo viên đánh giá xem các em đã hiểu vấn đề đến đâu.

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

6. Mệnh đề đảo "Nếu tam giác có hai đường cao bằng nhau thì tam giác đó cân". Mệnh đề đảo đó đúng.

7. Giả sử $a + b < 2\sqrt{ab}$. Khi đó $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$. Bất đẳng thức này sai. Vậy ta có mâu thuẫn.

8. Điều kiện đủ để tổng $a + b$ là số hữu tỉ là cả hai số a và b đều là số hữu tỉ. (*Chú ý :* Điều kiện này không là điều kiện cần. Chẳng hạn, với $a = \sqrt{2} + 1, b = 1 - \sqrt{2}$ thì $a + b = 2$ là số hữu tỉ nhưng a và b đều là số vô tỉ).

9. Điều kiện cần để một số chia hết cho 15 là nó chia hết cho 5. (*Chú ý :* Điều kiện này không là điều kiện đủ ; chẳng hạn, 10 chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 15).

10. Điều kiện cần và đủ để tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn là tổng hai góc đối diện của nó bằng 180^o.

11. Giả sử n^2 chia hết cho 5 và n không chia hết cho 5. Nếu $n = 5k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$ thì $n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$ không chia hết cho 5. Nếu $n = 5k \pm 2$, $k \in \mathbb{N}$ thì $n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$ không chia hết cho 5. Điều này mâu thuẫn với giả thiết n^2 chia hết cho 5.

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

1. Dạng khác của định lí

Nhiều định lí có dạng

$$"\forall x_1 \in X, ..., \forall x_n \in X, P(x_1 ; ... ; x_n) \Rightarrow Q(x_1 ; ... ; x_n)",$$

trong đó $P(x_1 ; ... ; x_n)$, $Q(x_1 ; ... ; x_n)$ là các mệnh đề chứa nhiều biến, X là một tập nào đó.

Ví dụ 1

Xét định lí "Với m, n là những số tự nhiên, nếu $m^2 + n^2$ chia hết cho 3 thì m và n đều chia hết cho 3". Nếu gọi $P(m ; n)$ là mệnh đề chứa biến "$m^2 + n^2$ chia hết cho 3", $Q(m ; n)$ là mệnh đề chứa biến "m và n đều chia hết cho 3" thì định lí trên có dạng "$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, P(m ; n) \Rightarrow Q(m ; n)$".

Ví dụ 2

Xét định lí "Với a, b là những số dương thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$". Định lí này có dạng "$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, P(a ; b) \Rightarrow Q(a ; b)$", trong đó $P(a ; b)$ là mệnh đề chứa biến "$a > 0$, $b > 0$", $Q(a ; b)$ là mệnh đề chứa biến "$a + b \geq 2\sqrt{ab}$".

2. Mệnh đề phản và mệnh đề phản đảo

Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. (2)

Mệnh đề $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$

gọi là *mệnh đề phản* của mệnh đề (2).

Mệnh đề $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ (3)

được gọi là *mệnh đề phản đảo* của mệnh đề (2).

Ví dụ 3

Xét mệnh đề "Nếu hôm nay trời mưa thì bể bơi đóng cửa". Mệnh đề phản của nó là "Nếu hôm nay trời không mưa thì bể bơi không đóng cửa". Mệnh đề phản đảo của nó là "Nếu hôm nay bể bơi không đóng cửa thì trời không mưa".

Mệnh đề (2) và mệnh đề phản đảo (3) có cùng tính đúng - sai. Thật vậy, giả sử mệnh đề (2) đúng nhưng mệnh đề (3) sai. Vì (3) sai nên $\overline{Q}$ đúng và $\overline{P}$ sai, tức là P đúng và Q sai. Nhưng điều đó có nghĩa là mệnh đề (2) sai. Vậy mệnh đề (3) phải đúng. Tiếp theo giả sử (2) sai. Vì (2) sai nên P đúng và Q sai. Do đó, $\overline{Q}$ đúng và $\overline{P}$ sai, tức là mệnh đề (3) sai.

Xét mệnh đề "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$". (4)

Mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$" (5)

được gọi là *mệnh đề phản đảo* của (4). Mệnh đề (4) và (5) có cùng tính đúng - sai.

Như vậy, thay vì chứng minh mệnh đề (4) đúng (tức là chứng minh định lí (4)), ta có thể chứng minh mệnh đề (5) đúng. Chứng minh theo cách này là một cách chứng minh gián tiếp.

Ví dụ 4

Chứng minh định lí "Với n là số tự nhiên, nếu $3n + 2$ là số lẻ thì n cũng là số lẻ". Ta chứng minh gián tiếp bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo "Nếu n là số chẵn thì $3n + 2$ là số chẵn". Thật vậy, nếu n chẵn thì $3n$ chẵn, do đó $3n + 2$ chẵn.