§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC
(2 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức

– Hiểu thế nào là đường tròn lượng giác và hệ toạ độ vuông góc gắn với nó, điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi số α (hay bởi góc α, cung α).

– Biết các định nghĩa côsin, sin, tang, côtang của góc lượng giác α và ý nghĩa hình học của chúng.

– Nắm chắc các công thức lượng giác cơ bản

$$\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}, 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\right).$$

Về kĩ năng

– Biết tìm điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi số thực α (nói riêng, M nằm trong góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ).

– Biết xác định dấu của $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ khi biết α ; biết các giá trị côsin, sin, tang, côtang của một số góc lượng giác thường gặp.

– Sử dụng thành thạo các công thức lượng giác cơ bản.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với đường tròn lượng giác luôn có hướng thuận, tức là góc lượng giác (Ox, Oy) có số đo $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Người ta thường vẽ hệ toạ độ vuông góc có trục hoành nằm ngang định hướng từ trái sang phải và trục tung nằm dọc định hướng từ dưới lên trên.

2) Một số sách giáo khoa coi cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ trên đường tròn lượng giác gốc A có số đo α (cũng như góc lượng giác (OA, OM) có số đo α), là cung lượng giác (góc lượng giác) "chuẩn tắc" có số đo α (so với cung lượng giác tuỳ ý $\overset{\curvearrowright}{UV}$ (góc lượng giác tuỳ ý) có số đo α). Cũng có sách gọi cung (góc) đó là cung (góc) biểu diễn số α. Còn trong SGK này, ta gọi chúng đơn giản là cung α (góc α). Điều này còn có thể giúp cho việc dạy và học hàm số lượng giác, giải phương trình lượng giác ở lớp 11.

3) Để học sinh dễ nhận thấy rằng khi $0 \le \alpha \le \pi$, các giá trị lượng giác của góc lượng giác α trùng với giá trị lượng giác của góc hình học có số đo α rad, trong SGK Hình học 10 khi xây dựng các giá trị lượng giác của góc hình học, ta đã dùng "nửa đường tròn lượng giác".

4) Cần lưu ý đến ý nghĩa của việc dùng số để xác định vị trí của điểm trên đường tròn lượng giác $\mathscr{C}$ gốc A : *Với mỗi số thực α, có đúng một điểm $M \in \mathscr{C}$ để $\overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha$, tức là có ánh xạ*

$$p : \mathbb{R} \to \mathscr{C}$$

$$\alpha \mapsto M \text{ sao cho } \overset{\curvearrowright}{AM} = \alpha.$$

Hoạt động $\boxed{\textbf{H1}}$ nhằm mô tả trực quan ánh xạ này. Xem hình 6.10 SGK : Khi quấn dây quanh đường tròn lượng giác, đoạn dây AM_1 có độ dài $|\alpha|$ (giả sử

$0 < |\alpha| < 2\pi$) được quấn (ngược chiều hay theo chiều quay kim đồng hồ tuỳ theo α dương hay α âm) thành cung tròn $\overset{\frown}{AM}$ có độ dài cũng bằng $|\alpha|$. Hoạt động này giúp thêm học sinh hình dung cụ thể điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi số thực α cho trước. Đề nghị các giáo viên lưu ý cho học sinh thực hiện hoạt động đó.

Ánh xạ nói trên là một toàn ánh (mỗi điểm thuộc $\mathscr{C}$ đều xác định bởi một số nào đó) nhưng không phải là một đơn ánh (nếu điểm M xác định bởi số α thì M cũng xác định bởi các số dạng $\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$). Nó đóng một vai trò quan trọng trong Hình học (cung lượng giác, số đo của cung lượng giác, toạ độ cực trong mặt phẳng (nhiều nước đã đưa toạ độ cực vào giảng dạy ở bậc Trung học, xem bài tập 37 SGK)), trong Giải tích (chẳng hạn $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, sẽ nói đến trong Giải tích 11)... .

Coi $\mathscr{C}$ là đường tròn đơn vị $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ thì ánh xạ p có thể được diễn tả bởi

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathscr{C} \\ \alpha &\mapsto e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \end{aligned}$$

(i là đơn vị ảo). Rõ ràng, nó là một đồng cấu từ nhóm cộng $\mathbb{R}$ lên nhóm nhân các số phức có môđun bằng 1, hạch là nhóm cộng $2\pi\mathbb{Z}$ và từ đó $\mathscr{C}$ có cấu trúc nhóm thương $\mathbb{R}/2\pi$ (xem lại về "góc định hướng" và hệ thức Sa-lơ (Bổ sung kiến thức, §1)). Về giải tích, p còn là một ánh xạ phủ nhóm liên tục.

Tất nhiên, việc dùng số đo độ của cung lượng giác cũng xác định được một ánh xạ phủ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/360$ tương tự như trên (nhưng ở đây, chẳng hạn có $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin a^{\circ}}{a} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\dfrac{180\alpha}{\pi}} = \dfrac{\pi}{180}$).

5) Do ý nghĩa quan trọng của côsin và sin (so với tang và côtang) nên chúng được tách riêng thành một mục (tang và côtang ở mục khác). Ta đã định nghĩa $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ nhờ toạ độ $(x\,;\,y)$ của điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi α : gọi hình chiếu của M lên các trục toạ độ Ox, Oy theo

thứ tự là H và K thì $\cos\alpha = x = \overline{OH}$, $\sin\alpha = y = \overline{OK}$. Các đẳng thức này thể hiện ý nghĩa hình học của $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$. Đẳng thức vectơ $\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ nêu tóm tắt và đầy đủ định nghĩa đó.

Còn đối với $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$, ta định nghĩa chúng nhờ các biểu thức $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ nên cần chú ý đến ý nghĩa hình học : $\tan\alpha = \overline{AT}$, $\cot\alpha = \overline{BS}$ (xem SGK trang 196 – 197).

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) Nên có một thiết bị dạy học nào đó (một vành tròn, một sợi dây) mô tả trực quan cho **H1** : một mặt giúp học sinh hiểu thêm về cung và góc lượng giác, mặt khác để nhấn mạnh thêm ý nghĩa của việc xác định vị trí của điểm trên đường tròn lượng giác nhờ số thực.

2) Về mối liên quan giữa dấu của côsin, sin, tang, côtang với vị trí của điểm M trên đường tròn lượng giác, SGK đã đề nghị các hoạt động **H4**, **H5**. Có lẽ cũng không cần phải có một bảng tổng kết mà nên nhắc nhở học sinh là nếu cần thì vẽ hệ toạ độ rồi từ định nghĩa côsin và sin (nhờ toạ độ), suy ra ngay điều đang xét (xem bài tập 21, SGK).

3) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 a) Các điểm trên trục số At có toạ độ $k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ đến trùng với điểm A khi quấn dây At quanh đường tròn lượng giác.

b) Các điểm trên trục số At có toạ độ $(2k + 1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ đến trùng với điểm A' khi quấn dây At quanh đường tròn lượng giác. Hai điểm tuỳ ý của chúng cách nhau $l2\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

H2 M có toạ độ $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

H3 a) Ta có $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow M$ trùng với $A\ (1\ ;\ 0)$ hoặc $A'\ (-1\ ;\ 0) \Leftrightarrow \alpha = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Khi M trùng với A, tức khi k chẵn thì $\cos k\pi = 1$. Khi M trùng với A', tức khi k lẻ thì $\cos k\pi = -1$. Vậy có thể viết chung $\cos k\pi = (-1)^k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow M$ trùng với $B(0\ ;\ 1)$ hoặc $B'(0\ ;\ -1) \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Khi M trùng với B, tức khi k chẵn thì $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=1$, còn khi M trùng với B', tức khi k lẻ thì $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-1$. Vậy có thể viết chung $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

H4 a) M là điểm nằm trên đường tròn lượng giác trong hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với nó (Ox vẽ nằm ngang định hướng từ trái sang phải, Oy vẽ thẳng đứng từ dưới lên trên) :

M nằm trong nửa mặt phẳng bên phải trục tung (không kể trục tung) thì $\cos(OA, OM) > 0$, bên trái trục tung thì $\cos(OA, OM) < 0$.

M nằm trong nửa mặt phẳng bên trên trục hoành (không kể trục hoành) thì $\sin(OA, OM) > 0$, bên dưới trục hoành thì $\sin(OA, OM) < 0$.

b) Vì $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ nên $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$.

H5 M là điểm nằm trên đường tròn lượng giác trong hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với nó (M không thuộc trục toạ độ nào) :

a) M nằm trong góc phần tư I hoặc III thì $\tan(OA, OM) > 0$ và $\cot(OA, OM) > 0$.

b) M nằm trong góc phần tư II hoặc IV thì $\tan(OA, OM) < 0$ và $\cot(OA, OM) < 0$.

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

14. a) Sai, chẳng hạn $\alpha = -\frac{7\pi}{4}$ thì $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ đều dương.

b) Sai, chẳng hạn $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ thì $\sin\alpha < 0$.

c) Sai, trên đường tròn lượng giác các điểm biểu diễn các số $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4} = -2\pi + \frac{\pi}{4}$, $-\frac{71\pi}{4} = -9.2\pi + \frac{\pi}{4}$ là trùng nhau nhưng không trùng với điểm biểu diễn số $\frac{13\pi}{4} = 3\pi + \frac{\pi}{4}$.

d) Đúng, vì $\cos^2 45^o = \frac{1}{2}$;

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ ;$$

$$-\sin 210^o = -\sin(180^o + 30^o) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

e) Sai, vì $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 1505\pi\right) = \sin\left(1506\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

g) Đúng, vì chỉ cần dựng lục giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác với một đỉnh là A và quan sát.

15. a) Ta có $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ khi và chỉ khi $\cos\alpha \geq 0$, tức là M có toạ độ $(x\ ;\ y)$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$.

b) Ta có $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$ khi và chỉ khi $\sin\alpha \geq 0$, tức là M có tọa độ $(x\ ;\ y)$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

c) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha \geq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow M$ có toạ độ $(x\ ;\ y)$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $y \neq 1$.

16. Theo quy ước, khi giải những bài tập xét dấu của giá trị lượng giác như thế này, học sinh không được dùng máy tính bỏ túi.

a) Do $0^o < 156^o < 180^o$ nên $\sin 156^o > 0$.

Do $-90^o < -80^o < 90^o$ nên $\cos(-80^o) > 0$.

Do $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right) = \tan\left(-2\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ mà $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{8} < 0$ nên $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right) < 0$.

Do $\tan 556^o = \tan(360^o + 196^o) = \tan 196^o$ mà $180^o < 196^o < 270^o$ nên $\tan 556^o > 0$.

b) Do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên :

$$0 < \alpha + \frac{\pi}{4} < \pi \text{, từ đó } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \ ;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{, từ đó } \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) > 0 \ ;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\pi}{2} < 0 \text{, từ đó } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

17. a) $-\dfrac{\pi}{3} + (2k+1)\pi = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ nên đưa về tính

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \ ; \ \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3} \ ; \ \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) $\cos k\pi = (-1)^k$; $\sin k\pi = 0$; $\tan k\pi = 0$; $\cot k\pi$ không xác định ($k \in \mathbb{Z}$).

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$;

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ không xác định ; $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

18. a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\sin\alpha < 0$ thì

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\frac{\sqrt{15}}{4}; \ \tan\alpha = -\sqrt{15} \ ; \ \cot\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

b) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ thì $\cos\alpha < 0$,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \ ; \ \tan\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ ; \ \cot\alpha = 2\sqrt{2}.$$

c) $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}, -\pi < \alpha < 0$ thì

$$-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2},\ \cos\alpha < 0\ ;\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}\ ;\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2.$$

19. a) $|\sin\alpha|$; b) 0 ; c) $\tan^2\alpha$.