§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức

– Củng cố thêm một bước vấn đề biến đổi tương đương các phương trình.

– Hiểu được giải và biện luận phương trình là thế nào.

– Nắm được các ứng dụng của định lí Vi-ét.

Về kĩ năng

– Nắm vững cách giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ và $ax^2 + bx + c = 0$.

– Biết cách biện luận số giao điểm của một đường thẳng và một parabol và kiểm nghiệm lại bằng đồ thị.

– Biết áp dụng định lí Vi-ét để xét dấu các nghiệm của một phương trình bậc hai và biện luận số nghiệm của một phương trình trùng phương.

Về thái độ. Rèn luyện tính cẩn thận, óc tư duy lôgic.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1) Ở lớp dưới, học sinh đã được học cách giải phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai. Do đó, điều chủ yếu trong bài này không phải là cách giải mà là cách biện luận các phương trình nói trên trong trường hợp có tham số. Điều học sinh thường thắc mắc là căn cứ vào đâu để phân chia các trường hợp. Vì vậy, giáo viên cần phân tích thêm điều này trong mỗi ví dụ cụ thể.

2) Vì lí do sư phạm, SGK đã không đưa vào khái niệm tuyển phương trình, cũng không sử dụng kí hiệu "[". Khi gặp trường hợp cần đến khái niệm tuyển phương trình, SGK dùng từ "hoặc" để thay thế. Chẳng hạn, ta viết

$$(x-1)(x-mx+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \ \text{ hoặc } \ x-mx+2=0$$

để thay cho

$$(x-1)(x-mx+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-mx+2=0. \end{array}\right.$$

Điều đó cũng không gây trở ngại gì nhiều, miễn là học sinh hiểu được cách tìm tập nghiệm của phương trình ban đầu sau khi đã giải xong từng phương trình trong tuyển. Tuy nhiên, giáo viên cũng có thể từng bước giới thiệu và sử dụng kí hiệu này, nhưng tránh lạm dụng dễ gây thêm những rắc rối không cần thiết.

3) Điều đáng chú ý là khi nào thì dùng "hay", khi nào dùng "hoặc", khi nào dùng "và". Trong phạm vi toán học, có thể phân biệt chúng như sau :

a) Từ "hay" thường được dùng theo nghĩa tương đương. Ví dụ :

... suy ra $x - 1 < 0$, hay $x < 1$ (bao hàm ý là $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$).

b) Từ "hoặc" thường được dùng thay cho phép tuyển. Ví dụ :

– Phương trình $x(x - 1) = 0$ tương đương với $x = 0$ *hoặc* $x = 1$.

– Bất đẳng thức $|A| > 2$ có nghĩa là $A > 2$ *hoặc* $A < -2$.

c) Từ "và" được dùng khi liệt kê hoặc thay cho phép hội. Ví dụ :

– Phương trình $x(x - 1) = 0$ có hai nghiệm là $x = 0$ *và* $x = 1$ (liệt kê).

– Hàm số $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ xác định với điều kiện $x \geq 0$ *và* $x - 1 \neq 0$ (phép hội).

4) Chú ý rằng cách viết kiểu như sau là không chính xác :

$$x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Trong trường hợp trên, đứng sau dấu tương đương ($\Leftrightarrow$) phải là một phương trình (hệ phương trình hoặc tuyển phương trình) với ẩn x, chứ không thể là các đẳng thức $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, trong đó x_1 và x_2 chỉ đơn giản là các kí hiệu chỉ nghiệm thứ nhất và nghiệm thứ hai mà thôi.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) Với hai tiết, giáo viên có thể dành tiết đầu cho mục 1 và 2, tiết thứ hai cho mục 3.

2) Trong ví dụ 1, khi đến phương trình $(m^2 - 1)x = 2(m - 1)$, giáo viên nên hỏi : "Muốn tìm x ta làm thế nào ?" (trả lời : chia cả hai vế cho $m^2 - 1$), rồi sau đó hỏi : "Có phải luôn thực hiện được phép chia cho $m^2 - 1$ hay không?". Từ đó dẫn đến việc xét ba trường hợp: $m \neq \pm 1$, $m = 1$ và $m = -1$. Cách làm này có thể áp dụng đối với các ví dụ tiếp theo nếu học sinh vẫn chưa thật hiểu rõ việc phân chia trường hợp đối với tham số như thế nào. Có thể coi đó là các hoạt động trên lớp, ngoài các hoạt động mà SGK đã nêu.

3) Trong ví dụ 2, học sinh thường hay quên không xét trường hợp hệ số của x^2 bằng 0 (trong ví dụ là $m = 0$).

4) Cần *yêu cầu học sinh trình bày phần kết luận* sau khi đã xét hết các trường hợp xảy ra đối với tham số. Trong sách đã nêu hai cách trình bày phần này : Cách liệt kê các nghiệm của phương trình cho mỗi trường hợp và cách viết ra tập nghiệm của phương trình trong mỗi trường hợp.

5) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 a) Phương trình có một nghiệm trong mỗi trường hợp sau :

- $a = 0$ và $b \neq 0$;
- $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

b) Phương trình vô nghiệm trong mỗi trường hợp sau :

- $a = b = 0$ và $c \neq 0$;
- $a \neq 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

H2 • Với $m = 1$, phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

• Với $m = 3$, phương trình có một nghiệm (kép) $x = 1$.

• Với $m \neq 1$ và $m \neq 3$, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{2}{m-1}$.

Gợi ý. Có hai cách giải :

Cách 1 là giải phương trình tích, cách 2 là khai triển vế trái đưa về phương trình bậc hai $(1 - m)x^2 + (m + 1)x - 2 = 0$ với biệt thức $\Delta = (m - 3)^2$.

Hoạt động này nhằm củng cố kĩ năng giải và biện luận phương trình. Học sinh có thể giải bằng một trong hai cách. Giáo viên chỉ cần nhận xét cách giải của học sinh rồi gợi ý học sinh về nhà giải theo cách thứ hai.

H3 Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là x_1 (cm) và chiều dài là x_2 (cm) (theo cách đặt, ta có $x_1 \leq x_2$). Khi đó, ta có $x_1 + x_2 = 40 : 2 = 20$ (cm) và $x_1x_2 = P$ (cm^2). Vậy x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 20x + P = 0.$$

a) Với $P = 99$, phương trình là $x^2 - 20x + 99 = 0$, $x_1 = 9$, $x_2 = 11$. Ta phải khoanh hình chữ nhật kích thước 9 cm × 11 cm.

b) Với $P = 100$, phương trình là $x^2 - 20x + 100 = 0$, $x_1 = x_2 = 10$. Ta phải khoanh hình chữ nhật kích thước 10 cm × 10 cm.

c) Với $P = 101$, phương trình là $x^2 - 20x + 101 = 0$, vô nghiệm. Vậy trong trường hợp này, không có hình chữ nhật nào thoả mãn yêu cầu đề bài.

H4 a) $-0{,}5x^2 + 2{,}7x + 1{,}5 = 0$. Ta có a = –0,5 và c = 1,5 trái dấu nên phương trình có hai nghiệm trái dấu. Do đó, ta chọn phương án (A).

b) Phương trình $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 vì

$$\Delta = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{6} = (2 + 2\sqrt{6} + 3) - 4\sqrt{6} = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 > 0.$$

Do $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \sqrt{6} > 0$ và $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ nên hai nghiệm này cùng dấu dương. Do đó, ta chọn phương án (B).

Hoạt động này nhằm khắc sâu kiến thức về xét dấu hai nghiệm của phương trình bậc hai.

H5 a) Đúng.

b) Sai, vì khi phương trình (5) chỉ có nghiệm âm (hoặc một nghiệm kép âm, hoặc hai nghiệm âm phân biệt) thì phương trình (4) vô nghiệm.

Hoạt động này nhằm giúp học sinh làm quen với các thao tác tư duy về quan hệ giữa các nghiệm của hai phương trình (4) và (5).

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

5. a) Sai, vì giá trị $x = 1$ không thoả mãn điều kiện xác định.

b) Sai, vì khi bình phương hai vế, ta chỉ được phương trình hệ quả. Cần thử lại nghiệm (giá trị tìm được của x không thoả mãn).

6. a) $x = \dfrac{2m - 3}{m^2 + 1}$ (với mọi m).

b) – Với $m = 1$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

– Với $m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = m + 2$.

c) – Với $m \neq 2$ và $m \neq 3$, phương trình vô nghiệm.

– Với $m = 2$ hoặc $m = 3$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Gợi ý. $m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6 \Leftrightarrow 0x = m^2 - 5m + 6$

$\Leftrightarrow 0x = (m - 2)(m - 3)$.

d) – Với $m \neq 1$ và $m \neq 2$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{m}{m-2}$.

– Với $m = 1$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

– Với $m = 2$, phương trình vô nghiệm.

Gợi ý. $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2) \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2)x = m^2 - m$

$\Leftrightarrow (m - 1)(m - 2)x = m(m - 1)$.

7. Hình 3.1 (Đại số 10 nâng cao, trang 74) cho thấy phương trình có nghiệm dương khi và chỉ khi $a > 2$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm $x = -1 \pm \sqrt{a-1}$, trong đó nghiệm dương là nghiệm lớn $x = -1 + \sqrt{a-1}$.

8. a) • Khi $m = 1$, phương trình trở thành $3x - 1 = 0$, nó có một nghiệm $x = \dfrac{1}{3}$.

• Khi $m \neq 1$, ta có phương trình bậc hai với biệt số $\Delta = 4m + 5$.

Với $m \geq -\dfrac{5}{4}$, phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{4m+5}}{2(m-1)}$;

Với $m < -\dfrac{5}{4}$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận :

– Khi $m = 1$, phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1}{3}$;

– Khi $m \geq -\dfrac{5}{4}$ và $m \neq 1$, phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{4m+5}}{2(m-1)}$;

– Khi $m < -\dfrac{5}{4}$, phương trình vô nghiệm.

b) Phương trình có hai nghiệm $x = 2 \pm \sqrt{7 - m}$ nếu $m \leq 7$, vô nghiệm nếu $m > 7$.

9. a) Ta có các hệ thức $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Do đó :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

b) • $f(x)$ có hai nghiệm là -4 và $\frac{1}{2}$ nên có thể phân tích thành :

$$f(x) = -2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+4)(1-2x).$$

• $g(x)$ có hai nghiệm là $\sqrt{2}$ và $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ nên có thể phân tích thành :

$$g(x) = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}+1\right)x - \sqrt{2}\right].$$

10. Hiển nhiên phương trình có hai nghiệm. Ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = -15$.

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 30 = 34.$

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8 + 90 = 98.$

c) $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2(x_1x_2)^2 = 34^2 - 2(-15)^2 = 706.$

11. Chọn (B). *Gợi ý*. Chú ý rằng phương trình bậc hai tương ứng có $ac < 0$ nên nó có hai nghiệm trái dấu, suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm đối nhau. Từ đó, ta loại các phương án (A) và (C). Phương án (D) cũng bị loại bằng cách thử trực tiếp.

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

Để giải phương trình, đôi khi ta dùng cách đặt ẩn phụ.

Giả sử ta cần giải phương trình sau với điều kiện $\mathcal{D}$:

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Nếu $F(x)$ có thể viết được dưới dạng $F(x) = f(u)$, trong đó $u = g(x)$ thì việc giải phương trình (1) có thể tiến hành như sau :

Bước 1. Đặt ẩn phụ.

Trong phương trình (1), đặt $u = g(x)$, ta có phương trình ẩn là u (thường gọi là phương trình trung gian)

$$f(u) = 0. \tag{2}$$

Bước 2. Giải phương trình (2).

– Nếu (2) vô nghiệm thì (1) vô nghiệm.

– Nếu (2) có các nghiệm là u_1, u_2, ... thì với điều kiện $\mathcal{D}$:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = u_1 \\ g(x) = u_2 \\ \ldots \end{array}\right.$$

Bước 3. Giải các phương trình $g(x) = u_1$, $g(x) = u_2$, ... với điều kiện $\mathcal{D}$.

Khi đó, tập nghiệm của phương trình (1) là tập tất cả các nghiệm thu được.

Chú ý

– Hai phương trình (1) và (2) là những phương trình không cùng ẩn nên ta không thể viết (1) $\Leftrightarrow$ (2).

– Đôi khi ta cũng đặt điều kiện cho phương trình (2). Thông thường, đó là điều kiện (dễ thấy) để phương trình $g(x) = u$ (ẩn x) có nghiệm, nhằm giảm bớt số phương trình trong tuyển phương trình phải giải ở bước 3.

Ví dụ. Giải phương trình

$$(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) - 12 = 0. \tag{3}$$

Giải. Trong phương trình (3), đặt $u = x^2 + x$, ta có phương trình ẩn u

$$u^2 - u - 12 = 0. \tag{4}$$

Giải phương trình (4), ta được hai nghiệm là $u_1 = -3$ và $u_2 = 4$. Do đó

$$(3) \Leftrightarrow x^2 + x = -3 \text{ hoặc } x^2 + x = 4.$$

- $x^2 + x = -3 \Leftrightarrow x^2 + x + 3 = 0$ (phương trình này vô nghiệm).
- $x^2 + x = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Kết luận. Phương trình (3) có hai nghiệm $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.