§3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

– Biết dùng hình vẽ để tìm và nhớ được các công thức về giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt và sử dụng được chúng.

– Khi dùng bảng để tính gần đúng các giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác tuỳ ý, biết cách đưa về xét góc α, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ (thậm chí $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$).

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

SGK có nêu chú ý : *Với mọi góc lượng giác* (Ou, Ov), *ta có*

$$\cos\widehat{uOv} = \cos(Ou, Ov);$$
$$\sin\widehat{uOv} = |\sin(Ou, Ov)|.$$

Đây là những tính chất dễ thấy nhưng ít khi được nêu lên một cách rõ ràng. Chúng giúp ích cho việc khảo sát hình học phẳng và cũng được dùng trong chứng minh công thức cộng ở §4.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) Nếu có điều kiện thời gian, nên để học sinh quan sát trên hình vẽ rồi suy ra các công thức trong bài, nhưng cũng không buộc các em làm đầy đủ với cả bốn trường hợp.

2) Trong bốn trường hợp xét đến, chỉ có trường hợp hai góc phụ nhau (trường hợp 4) là khó hơn cả ; nên dừng lại ở đây lâu hơn và vẫn nên dùng hình vẽ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ cho dễ thấy (xem *Bổ sung kiến thức*).

3) Để ý rằng ví dụ cuối §3 nói về mối liên quan giữa các giá trị lượng giác của $\frac{\pi}{2}+\alpha$ và α. Công thức này thường gặp do gắn chặt với phép quay góc $\frac{\pi}{2}$.

4) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H a) M và N đối xứng với nhau qua trục Ox nên có cùng hoành độ và có tung độ đối nhau (h. 6.20 SGK).

b) M và N đối xứng với nhau qua gốc toạ độ nên có hoành độ đối nhau và tung độ đối nhau (h. 6.21 SGK).

c) M và N đối xứng với nhau qua trục Oy nên có cùng tung độ và có hoành độ đối nhau (h. 6.22 SGK).

d) M và N đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư I (và góc phần tư III) nên hoành độ của điểm này bằng tung độ của điểm kia (h. 6.23 SGK).

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

24. a) Sai. Khi đổi dấu α, $\cos\alpha$ không đổi còn $\tan\alpha$ đổi dấu.

b) Sai. Chẳng hạn $\alpha=\frac{\pi}{2}$ thì $2\sin\alpha=2$ còn $\sin2\alpha=0$.

c) Đúng, vì

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$, nên $\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(\alpha+\pi)\right|=0$;

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$, $\sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$, nên $\left|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)\right|=0$.

d) Sai, chẳng hạn với $\alpha=\pi$ thì $\frac{\cos(-5\alpha)}{\cos\alpha}=1$.

e) Đúng, vì $\cos\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$ nên $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}=1$.

g) Đúng, vì $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{\pi}{10}$.

25. $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$;

$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$;

$\tan\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\cot\alpha$ $(\alpha\neq k\pi, k\in\mathbb{Z})$;

$\cot\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\tan\alpha$ $(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z})$.

26. a) Do $\sin^2 a^{\circ}+\sin^2(90^{\circ}-a^{\circ})=\sin^2 a^{\circ}+\cos^2 a^{\circ}=1$ nên tổng ở đề bài bằng 4.

b) Do $\cos a^{\circ}+\cos(180^{\circ}-a^{\circ})=\cos a^{\circ}-\cos a^{\circ}=0$,

$\cos 90^{\circ}=0$, $\cos 180^{\circ}=-1$

nên tổng ở đề bài bằng -1.

c) Do $\cos 315^{\circ}=\cos(-45^{\circ})=\cos 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin 330^{\circ}=-\sin 30^{\circ}=-\frac{1}{2}$;

$\sin 250^{\circ}=-\sin 110^{\circ}=-\sin(90^{\circ}+20^{\circ})=-\cos 20^{\circ}$;

$\cos 160^{\circ}=-\cos 20^{\circ}$;

nên tổng ở đề bài bằng $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$.

27. $\cos(-250^{\circ})=\cos 250^{\circ}=\cos(180^{\circ}+70^{\circ})=-\cos 70^{\circ}=-\sin 20^{\circ}\approx-0{,}342$;

$\sin 520^{\circ}=\sin(360^{\circ}+160^{\circ})=\sin 160^{\circ}=\sin(180^{\circ}-20^{\circ})=\sin 20^{\circ}\approx 0{,}342$;

$\sin\frac{11\pi}{10}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{10}\right)=-\sin\frac{\pi}{10}=-\sin 18^{\circ}\approx-0{,}309$.

28. Điểm $M\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ nằm trên đường tròn lượng giác vì $\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$.

M xác định bởi số α thì $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ và từ đó suy ra :

Toạ độ điểm xác định bởi số $\pi - \alpha$ là $\left(\frac{4}{5} ; \frac{3}{5}\right)$;

Toạ độ điểm xác định bởi số $\pi + \alpha$ là $\left(\frac{4}{5} ; -\frac{3}{5}\right)$;

Toạ độ điểm xác định bởi số $\frac{\pi}{2} - \alpha$ là $\left(\frac{3}{5} ; -\frac{4}{5}\right)$;

Toạ độ điểm xác định bởi số $\frac{\pi}{2} + \alpha$ là $\left(-\frac{3}{5} ; -\frac{4}{5}\right)$.

29. Từ $\tan 15^{o} = 2 - \sqrt{3}$, suy ra $\cos^{2} 15^{o} = \frac{1}{1 + (2 - \sqrt{3})^{2}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$,

$\cos 15^{o} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$; $\sin 15^{o} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Do $75^{o} = 90^{o} - 15^{o}$ nên $\cos(-75^{o}) = \cos 75^{o} = \sin 15^{o} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$;

$\sin(-75^{o}) = -\sin(90^{o} - 15^{o}) = -\cos 15^{o} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$;

$\tan(-75^{o}) = -\cot 15^{o} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = -(\sqrt{3} + 2)$;

$\cot(-75^{o}) = -\tan 15^{o} = \sqrt{3} - 2$.

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về trường hợp hai góc phụ nhau α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

• Xét ba điểm V, W, P trên đường tròn lượng giác tâm O xác định theo thứ tự bởi các số α, β, γ. Khi đó V, W đối xứng với nhau qua đường thẳng OP nếu và chỉ nếu $\alpha + \beta = 2\gamma + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Thực vậy, dễ thấy rằng (theo mô tả cung lượng giác) V, W đối xứng với nhau qua đường thẳng OP khi và chỉ khi

$$\text{sđ}(OP, OV) + \text{sđ}(OP, OW) = k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

tức là theo hệ thức Sa-lơ, ta có $\alpha - \gamma + \beta - \gamma = k2\pi$ hay $\alpha + \beta = 2\gamma + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Từ đó suy ra rằng hai điểm M, N trên đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi α và $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư I (và III) của hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với đường tròn lượng giác (ở đây $\gamma = \frac{\pi}{4}$).

• Hai điểm $M(x\ ;\ y)$ và $N(x'\ ;\ y')$ của mặt phẳng toạ độ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư I (và III) khi và chỉ khi trung điểm của đoạn MN thuộc đường phân giác đó, tức là $\frac{y + y'}{2} = \frac{x + x'}{2}$ và vectơ $\overrightarrow{MN}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $(1\ ;\ 1)$ của đường phân giác đó, tức là $(x' - x) + (y' - y) = 0$. Vì vậy $x' = y$, $y' = x$.