§4. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC (2 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh nhớ và sử dụng được công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức hạ bậc, biến đổi tổng thành tích và biến đổi tích thành tổng.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Mục tiêu của bài là giúp học sinh nhớ và sử dụng được công thức, nên cần cho học sinh làm nhiều bài tập về phần này. Có thể nhắc nhở học sinh : Để khẳng định rằng không xảy ra đẳng thức giữa hai biểu thức lượng giác, ta có thể xét giá trị của chúng tại một số góc đặc biệt nào đó.

2) Khi biến đổi lượng giác, cần nhắc nhở học sinh điều kiện để các biểu thức có nghĩa. Tuy nhiên, vì học sinh chưa học về phương trình lượng giác nên không buộc học sinh trong mọi trường hợp phải xác định cụ thể tập các số α để các biểu thức đó có nghĩa.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi

H1 a) Do $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ nên :

$$\cos(\alpha + \pi) = \cos\alpha\cos\pi - \sin\alpha\sin\pi = -\cos\alpha;$$

$$\sin(\alpha + \pi) = \sin\alpha\cos\pi + \cos\alpha\sin\pi = -\sin\alpha.$$

b) Do $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ nên :

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \cos\alpha.$$

H2 Điều kiện để các biểu thức ở công thức $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ có nghĩa là $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, tức là α, β, $\alpha + \beta$ không có dạng $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). (Để ý rằng nếu $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$ thì $\tan\alpha\tan\beta = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) = 0$).

H3 $$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

H4 $$\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}\cos 2\alpha\cos 4\alpha$$

$$= \frac{\sin 4\alpha}{4}\cos 4\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{8}.$$

H5 $$\cos\frac{7\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}.$$

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

38. a) Sai, vì chẳng hạn với $\beta = 0$, hai vế đẳng thức đó trở thành $\cos\alpha$ và $\cos\alpha + 1$.

b) Sai, vì chẳng hạn với $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = -\frac{\pi}{2}$, hai vế đẳng thức đó trở thành 0 và 2.

c) Đúng.

d) Sai, vì chẳng hạn với $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, hai vế đẳng thức đó trở thành 1 và 0.

e) Sai, vì chẳng hạn với $\alpha = \frac{\pi}{8}$, hai vế đẳng thức đó trở thành $\sqrt{2}$ và 1.

g) Sai, vì chẳng hạn với $\alpha = \frac{\pi}{2}$, hai vế đẳng thức đó trở thành 1 và 0.

39. a) $\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o) = \cos 45^o \cos 30^o - \sin 45^o \sin 30^o =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1);$$

$\sin 75^o = \sin(45^o + 30^o) = \sin 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \sin 30^o =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1);$$

$$\tan 75^o = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}\ ;\ \cot 75^o = 2 - \sqrt{3}.$$

b) $\cos 15^o = \cos(45^o - 30^o) = \cos 45^o \cos 30^o + \sin 45^o \sin 30^o$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)\ (= \sin 75^o);$$

$\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) = \sin 45^o \cos 30^o - \cos 45^o \sin 30^o$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)\ \ (= \cos 75^o);$$

$$\tan 15^o = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}\ (= \cot 75^o);\quad \cot 15^o = 2 + \sqrt{3}.$$

40. Để ý rằng $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\tan\frac{\pi}{4} = 1$,

từ các công thức cộng dễ thấy a), b), c), d).

41. a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Từ đó :

$$\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9};\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{9};$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{7}, \quad \cot 2\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Do $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$. Vậy $\cos\frac{\alpha}{2}$ và $\sin\frac{\alpha}{2}$ đều dương.

Từ công thức $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$, suy ra $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}}$ và từ công thức $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$, suy ra $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}}$.

Từ đó $\tan\frac{\alpha}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$, $\cot\frac{\alpha}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$.

b) $2\cos^2 15^\circ = 1 + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

$2\sin^2 15^\circ = 1 - \cos 30^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ và

$\tan 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$; $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

42. a) $\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$

$$= \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3}).$$

b) Để ý rằng $\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{8\pi}{7}$, ta có

$$\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7} \text{ (xem } \boxed{\textbf{H4}} \text{ SGK).}$$

Từ đó $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

c) Để ý rằng $\sin 42^o = \cos 48^o$, $\sin 66^o = \cos 24^o$, $\sin 78^o = \cos 12^o$, ta có :

$$\cos 6^o \sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o = \sin 6^o \cos 6^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o$$

$$= \frac{1}{16}\sin 96^o = \frac{1}{16}\cos 6^o.$$

Từ đó $\sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o = \frac{1}{16}$.

43. a) $\cos 75^o \cos 15^o = \frac{1}{2}(\cos 90^o + \cos 60^o) = \frac{1}{4}$,

$\sin 75^o \sin 15^o = \cos 15^o \cos 75^o = \frac{1}{4}$.

b) $\cos 75^o \sin 15^o = \frac{1}{2}(\sin 90^o - \sin 60^o) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

c) $\sin 75^o \cos 15^o = \frac{1}{2}(\sin 90^o + \sin 60^o) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

d) $\cos\alpha \sin(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha - \beta + \gamma)\right]$,

$\cos\beta \sin(\gamma - \alpha) = \frac{1}{2}\left[\sin(\beta + \gamma - \alpha) - \sin(\beta - \gamma + \alpha)\right]$,

$\cos\gamma \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\gamma - \alpha + \beta)\right]$.

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên, ta suy ra điều cần chứng minh.

44. a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \sin\alpha$.

b) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=$

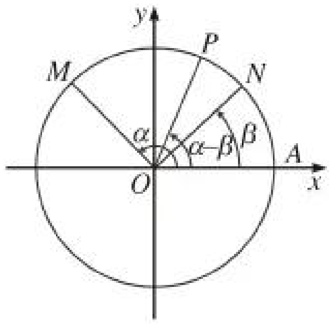
$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha\,.\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=-2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin 2\alpha.$$

45. a) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=-\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\cot\dfrac{\pi}{6}=-\sqrt{3}\,.$

b) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin 7\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{2\sin 4\alpha\sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha\sin 3\alpha}=\tan 4\alpha\,.$

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC



Hình 6.7

• Có nhiều cách chứng minh công thức cộng cũng không phức tạp hơn cách chứng minh trong SGK. Chẳng hạn, xét các điểm (h. 6.7) :

$M(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha)$, $N(\cos\beta\,;\,\sin\beta)$,

$P(\cos(\alpha-\beta)\,;\,\sin(\alpha-\beta))$, $A(1\,;\,0)$.

Ta có

$\cos\widehat{MON}=\cos(ON,OM)=\cos((OA,OM)-(OA,ON))=\cos(\alpha-\beta)$ và

$\cos\widehat{AOP}=\cos(OA,OP)=\cos(\alpha-\beta)$

nên các góc hình học $\widehat{MON}$, $\widehat{AOP}$ bằng nhau. Do đó, các dây cung MN và AP bằng nhau, tức là

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)\,.$$

Đơn giản hai vế, ta được

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

• Để chứng minh công thức cộng cho trường hợp α, β, $\alpha+\beta$ là góc nhọn , có SGK nước ngoài còn dùng cách sau (ta chỉ có thể coi như kiểm nghiệm công thức đã học) : Xem hình 6.8, dễ thấy

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OQ}{ON}=\frac{OP-QP}{ON}=\frac{OP}{ON}-\frac{QP}{ON}$$

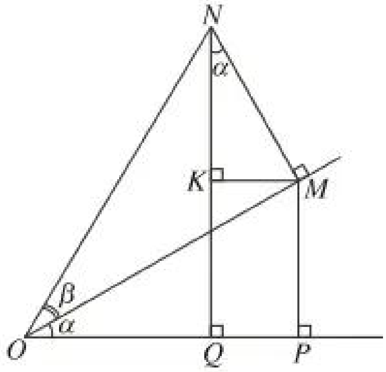
$$=\frac{OP}{OM}\cdot\frac{OM}{ON}-\frac{KM}{MN}\cdot\frac{MN}{ON}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{QN}{ON}=\frac{QK+KN}{ON}=\frac{QK}{ON}+\frac{KN}{ON}$$

$$=\frac{PM}{OM}\cdot\frac{OM}{ON}+\frac{KN}{MN}\cdot\frac{MN}{ON}$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$



Hình 6.8