§5. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức. Nắm được các phương pháp chủ yếu giải hệ phương trình bậc hai hai ẩn, nhất là hệ phương trình đối xứng.

Về kĩ năng. Biết cách giải một số dạng hệ phương trình bậc hai hai ẩn, đặc biệt là các hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai, hệ phương trình đối xứng.

II. NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1) Nội dung các vấn đề về hệ phương trình bậc hai rất phong phú. Tuy nhiên, trong khuôn khổ của chương trình, SGK chỉ yêu cầu học sinh biết cách giải một số dạng nhất định như đã trình bày. Nhiều vấn đề khác có liên quan như

tính chất các nghiệm, giải và biện luận hệ phương trình có chứa tham số và một số dạng phức tạp khác sẽ được giới thiệu trong các tài liệu tham khảo.

2) Nhận xét "*Nếu một hệ phương trình đối xứng đối với hai ẩn có nghiệm là* (a ; b) *thì cũng có nghiệm là* (b ; a)" sẽ rất có ích cho học sinh.

– Một là, học sinh có thể căn cứ vào đó để tự kiểm tra xem mình giải hệ phương trình có gì sai sót không : nếu tìm thấy nghiệm (a ; b) mà không thấy nghiệm (b ; a) thì có thể khẳng định lời giải "có vấn đề".

Tuy nhiên, nếu có đầy đủ các nghiệm (a ; b) và (b ; a) thì vẫn chưa thể khẳng định lời giải là chắc chắn đúng. Thử lại là phương pháp tốt nhất trong trường hợp này.

– Hai là, có thể sử dụng để giải loại bài tập đơn giản như trong ví dụ nêu trong phần bổ sung kiến thức.

3) Giáo viên không nên khai thác sâu vấn đề này và không cho thêm các bài tập quá phức tạp.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) Nếu điều kiện cho phép, giáo viên chỉ cần gợi ý cho học sinh về hướng giải. Học sinh sẽ tự tìm thấy lời giải cho mình. Cũng có thể cho học sinh làm việc theo nhóm, giáo viên chỉ việc kiểm tra về hướng giải và kết quả (đáp số) của từng nhóm.

2) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 (Ia) $\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 10y^2 - 30y + 20 = 0. \end{cases}$

Ta có $10y^2 - 30y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = 2$. Do đó :

(Ia) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

Hệ (I) có hai nghiệm (3 ; 1) và (1 ; 2).

Hoạt động này có hai ý nghĩa : Một là nêu lên phương pháp giải hệ phương trình bậc hai trong trường hợp hệ đó có một phương trình bậc nhất ; hai là qua đó, thấy được rằng *phương pháp thế (trước đó học sinh mới biết dùng để giải hệ phương trình bậc nhất) có thể dùng để giải các hệ phương trình bậc cao*, miễn là từ một phương trình có thể biểu diễn một ẩn qua các ẩn còn lại. Giáo viên nên phân tích điều này cho các học sinh khá và giỏi.

H2 Hệ (IIa) cho thấy x và y là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$t^2 + 3t + 5 = 0$. Phương trình này vô nghiệm nên hệ (IIa) vô nghiệm.

Dễ thấy hệ (IIb) có hai nghiệm là (0 ; 2) và (2 ; 0). Đó cũng là tất cả hai nghiệm của hệ phương trình đã cho.

H3 Giải hệ phương trình (IIIa) và (IIIb) bằng phương pháp thế, ta được :

Hệ (IIIa) có hai nghiệm (0 ; 0) và (3 ; 3). Hệ (IIIb) có nghiệm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Vậy hệ (III) có bốn nghiệm là các nghiệm của (IIIa) và (IIIb).

H4 Dễ thấy (0 ; 0) là nghiệm thứ ba của hệ. Ngoài ra, do tính đối xứng, từ nghiệm đã cho $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, ta suy ra nghiệm thứ tư của hệ là $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Chú ý. Mục đích của hoạt động này là nhằm khắc sâu thêm chú ý trước đó. Tuy nhiên, đây là một hoạt động tương đối khó. Đối với các lớp học sinh không khá lắm, giáo viên có thể bỏ qua hoạt động này, hoặc gợi ý thêm rằng (0 ; 0) là một nghiệm đặc biệt của hệ.

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

45. a) (10 ; 8) và (–8 ; –10) ; b) (1 ; –1) và $\left(-\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

46. a) (1 ; 2) và (2 ; 1). *Gợi ý*. Đặt $S = x + y$ và $P = xy$.

b) (0 ; 1) và (–1 ; 0). *Gợi ý*. Đặt $x' = -x$ để đưa về hệ đối xứng.

c) Trừ từng vế hai phương trình, ta được :

$$x^2 - y^2 - 3x + 3y = 2y - 2x \Leftrightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0$$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ hoặc $x + y - 1 = 0$.

Vậy hệ đã cho tương đương với :

$$\text{(I)}\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \text{(II)}\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Giải (I) : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 2x \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$ hoặc $x = y = 5$.

Giải (II) : (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 2(1-x) \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Kết luận. Hệ phương trình có bốn nghiệm : (0 ; 0), (5 ; 5), (–1 ; 2), (2 ; –1).

47. $S^2 - 4P \geq 0$.

48. a) (–8 ; –12), (–12 ; –8), (8 ; 12) và (12 ; 8).

Gợi ý. Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 2 rồi cộng vào phương trình thứ nhất thì được $(x + y)^2 = 400$, tức là $x + y = \pm 20$. Do đó, hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + y = -20 \\ xy = 96. \end{cases}$$

b) Bình phương hai vế của phương trình thứ hai, ta có hệ phương trình *hệ quả* :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 55 \\ x^2y^2 = 576. \end{cases}$$

Đặt $u = x^2$, $v = y^2$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} u - v = 55 \\ uv = 576. \end{cases}$

Giải hệ phương trình này bằng phương pháp thế với chú ý rằng $u \geq 0$ và $v \geq 0$, ta được $u = 64$; $v = 9$. Từ đây, nghiệm của hệ đã cho có thể lấy trong bốn cặp sau : (8 ; 3), (8 ; –3), (–8 ; 3), (–8 ; –3). Thử lại, ta thấy chỉ có hai cặp (8 ; 3) và (–8 ; –3) là thoả mãn. Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là (8 ; 3) và (–8 ; –3).

49. Do parabol $y = f(x)$ cắt trục tung tại (0 ; –4) nên hàm số có dạng $y = ax^2 + bx - 4$, $(a \neq 0)$, tức là $c = -4$.

Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Từ giả thiết, ta có $(x_1 - x_2)^2 = 25$ hay

$$\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = 25\text{, tức là } \left(-\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{16}{a} = 25.$$

Từ đó, cùng với điều kiện $f(2) = 6$, ta có hệ phương trình với ẩn là a và b sau đây.

$$\begin{cases} 4a + 2b - 4 = 6 \\ \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{16}{a} = 25 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2a + b = 5 \\ b^2 + 16a = 25a^2. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có hai nghiệm $(a\ ;\ b) = (1\ ;\ 3)$ và $(a\ ;\ b) = \left(\dfrac{-25}{21}\ ;\ \dfrac{155}{21}\right)$.

Vậy ta có hai hàm số $f_1(x) = x^2 + 3x - 4$ và $f_2(x) = -\dfrac{25}{21}x^2 + \dfrac{155}{21}x - 4$ cùng thoả mãn yêu cầu của bài toán.

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

1) *Giải hệ phương trình, trong đó có một phương trình tích*

Do $P_1(x\ ;\ y)P_2(x\ ;\ y) = 0 \Leftrightarrow P_1(x\ ;\ y) = 0$ hoặc $P_2(x\ ;\ y) = 0$

nên ta có công thức sau (với cùng điều kiện của hệ phương trình ban đầu) :

$$\begin{cases} P_1(x\ ;\ y)P_2(x\ ;\ y) = 0 \\ Q(x\ ;\ y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x\ ;\ y) = 0 \\ Q(x\ ;\ y) = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} P_2(x\ ;\ y) = 0 \\ Q(x\ ;\ y) = 0. \end{cases}$$

Chú ý rằng trong trường hợp này, *không nên sử dụng* kí hiệu tuyển phương trình :

$$\begin{cases} P_1(x\ ;\ y)P_2(x\ ;\ y) = 0 \\ Q(x\ ;\ y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P_1(x\ ;\ y) = 0 \\ Q(x\ ;\ y) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P_2(x\ ;\ y) = 0 \\ Q(x\ ;\ y) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

2) *Một phương pháp tìm điều kiện để hệ phương trình đối xứng có nghiệm duy nhất*

Ví dụ

Tìm các giá trị của tham số để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2m \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Giải. Giả sử $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ. Dễ thấy đây là hệ phương trình đối xứng đối với hai ẩn nên $(x ; y) = (y_0 ; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Do tính duy nhất của nghiệm, ta có $(x_0 ; y_0) = (y_0 ; x_0)$, nghĩa là $x_0 = y_0$. Thế vào hệ, ta được :

$$\begin{cases} x_0^3 + x_0^3 = 2m \\ x_0 + x_0 = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_0^3 = m \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $m = 8$.

Ngược lại, khi $m = 8$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 16 \\ x + y = 4. \end{cases} \qquad (*)$$

Đặt $S = x + y$ và $P = xy$, ta có hệ (ẩn là S và P)

$$\begin{cases} SP = 16 \\ S = 4 \end{cases} \Leftrightarrow S = P = 4.$$

Từ đó dễ thấy hệ (*) có một nghiệm duy nhất $x = y = 2$ (thoả mãn đề bài). Vậy $m = 8$ là giá trị cần tìm.