§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI (1 tiết)

I. MỤC TIÊU

Giúp học sinh :

Về kiến thức. Nắm vững định lí về dấu của tam thức bậc hai thông qua việc khảo sát đồ thị của hàm số bậc hai trong các trường hợp khác nhau.

Về kĩ năng. Vận dụng thành thạo định lí về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu các tam thức bậc hai và giải một vài bài toán đơn giản có tham số.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1) Việc chứng minh định lí về dấu của tam thức bậc hai không khó và không phức tạp. Học sinh sẽ được hướng dẫn chứng minh định lí này trong bài tập 52. Cách dẫn dắt để đi đến định lí này trong bài nhằm giúp học sinh từ đồ thị của các hàm đa thức bậc hai trong các trường hợp khác nhau, xác định được dấu của các tam thức bậc hai cho trước. Nếu có thời gian, giáo viên có thể cho học sinh giải một vài bài tập như : Vẽ đồ thị các hàm số

$$y = 2x^2 - 5x + 3 \ ; \ y = x^2 - x + \frac{1}{4} \text{ và } y = x^2 - 2x + 5.$$

Từ đó xác định dấu của các tam thức bậc hai tương ứng.

Cách trình bày vừa nêu không những giúp học sinh hiểu vấn đề một cách trực quan và sinh động hơn mà còn rèn luyện cho các em kĩ năng sử dụng đồ thị của hàm số để giải một số bài toán. Đó cũng là một trong những yêu cầu quan trọng của chương trình.

2) Trong một số ví dụ và bài tập, ta gặp biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó hệ số a có chứa tham số. Khi đó, nhất thiết phải xét hai trường hợp : $a = 0$ và $a \neq 0$. Với $a \neq 0$, $f(x)$ là một tam thức bậc hai. Với $a = 0$, $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất hoặc một hằng số.

Ví dụ

Tìm các giá trị của m sao cho bất phương trình

$$(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1 \leq 0$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải. Đặt $f(x) = (m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1$.

• Nếu $m = -1$ thì $f(x) = -2 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giá trị $m = -1$ thoả mãn điều kiện bài toán.

• Nếu m $\neq -1$ thì $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

$f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ m+1 < 0. \end{cases}$$

Thay $\Delta' = 2m + 2$ vào hệ trên và giải nó, ta được

$$\begin{cases} 2(m+1) \leq 0 \\ m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Từ hai kết quả trên suy ra rằng bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \leq -1$.

Chú ý. Nếu không xét trường hợp $a = m + 1 = 0$ thì trong đáp số, ta sẽ bỏ sót giá trị $m = -1$.

III. GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

1) *Gợi ý về đồ dùng dạy học*. Để tận dụng thời gian giảng dạy trên lớp, giáo viên nên vẽ trước sáu đồ thị trong bài.

2) *Gợi ý các hoạt động trên lớp và trả lời câu hỏi*

H1 *Mục đích*. Giúp học sinh vận dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu các tam thức bậc hai trong các trường hợp $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ và $\Delta = 0$. Ta có :

$f(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty ; -1) \cup \left(\frac{7}{2} ; +\infty\right)$ và

$f(x) > 0$ với mọi $x \in \left(-1 ; \frac{7}{2}\right)$;

$g(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $h(x) > 0$ với mọi $x \neq \frac{2}{3}$.

H2 *Mục đích*. Giúp học sinh vận dụng nhận xét trong bài. Hoạt động này được giải tương tự như ví dụ 3.

Giải. $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+1)x + m + 1$.

• Nếu $m = 1$ thì $f(x) = 3x + 2$. Vì $f(x) < 0$ chỉ với $x < -\frac{2}{3}$ nên giá trị $m = 1$ không thoả mãn điều kiện bài toán.

• Nếu $m \neq 1$ thì $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

$f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m - 1 < 0. \end{cases}$

Thay $\Delta = 4m + 5$, ta được hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 4m + 5 < 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{5}{4} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\dfrac{5}{4}.$$

Vậy $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < -\dfrac{5}{4}$.

IV. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

49. a) Tam thức bậc hai dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai âm với mọi $x \in (-\infty\ ;\ 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}\ ;\ +\infty)$ và dương với mọi $x \in (2 - \sqrt{3}\ ;\ 2 + \sqrt{3})$.

c) Tam thức bậc hai dương với mọi $x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Tam thức bậc hai âm với mọi $x \in (-\infty\ ; -3 - 2\sqrt{2}) \cup (1\ ; +\infty)$ và dương với mọi $x \in (-3 - 2\sqrt{2}\ ;\ 1)$.

50. a) $m < \dfrac{1}{2}$.

b) Đặt $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$.

• Với $m = -2$, ta có $f(x) = 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Với $m \neq -2$, $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

$f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ m + 2 > 0. \end{cases}$$

Thay $\Delta' = -m - 2$ vào hệ trên và giải nó, ta được

$$\begin{cases} -m - 2 < 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Vậy biểu thức đã cho dương với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \geq -2$.

51. a) m lấy mọi giá trị của $\mathbb{R}$.

b) Dễ thấy $m = 2$ không thoả mãn điều kiện bài toán.

Với $m \neq 2$, biểu thức đã cho âm với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \\ m - 2 < 0. \end{cases}$$

Thay $\Delta' = -3m + 7$ vào hệ trên và giải nó, ta được

$$\begin{cases} -3m + 7 < 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{7}{3} \\ m < 2. \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm. Vậy không có giá trị nào của m thoả mãn điều kiện bài toán.

52. Ta có

$$af(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

• Hiển nhiên, nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) = a^2\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. Hiển nhiên $af(x) > 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Do đó $$af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2).$$

Vậy $af(x)$ có cùng dấu với tích $(x - x_1)(x - x_2)$. Dấu của tích này được cho trong bảng sau (giả sử $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó, $af(x) < 0$ với mọi $x \in (x_1 ; x_2)$ và

$af(x) > 0$ với mọi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.