E - GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các kiến thức được nêu sau đây có bổ sung một vài kết quả *dễ nhận thấy* và được *sử dụng nhiều trong thực hành giải toán*.

1. Các phép biến đổi tương đương các phương trình

• Thực hiện các phép toán đại số trong từng vế nhưng không làm thay đổi tập xác định của phương trình.

• Thêm vào hai vế của phương trình cùng một biểu thức xác định với mọi x thuộc tập xác định của phương trình (trường hợp hay dùng là *quy tắc chuyển vế*).

• Nhân hai vế của phương trình với cùng một biểu thức xác định và khác 0 với mọi giá trị của ẩn thuộc tập xác định của phương trình (chú ý rằng *chia* cho một số, tức là *nhân* với nghịch đảo của số đó).

• Bình phương hai vế của một phương trình có hai vế luôn cùng dấu (với mọi x thuộc tập xác định của phương trình).

2. Phép biến đổi cho phương trình hệ quả

Bình phương hai vế của một phương trình.

3. Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

$a \neq 0$: phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.

$a = 0$ và $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm.

$a = b = 0$: phương trình nghiệm đúng với mọi x.

4. Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$, $(\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b')$;

$\Delta < 0$ $(\Delta' < 0)$: phương trình vô nghiệm.

$\Delta = 0$ $(\Delta' = 0)$: phương trình có một nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$ $\left(= -\dfrac{b'}{a}\right)$.

$\Delta > 0$ $(\Delta' > 0)$: phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \left(= \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right).$$

5. Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ $(a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0)$;

$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$; $\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$;

$\mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$

$\mathrm{D} \neq 0$: hệ có một nghiệm duy nhất $(x ; y)$, trong đó $x = \dfrac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}$, $y = \dfrac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$.

$\mathrm{D} = 0$, $D_x \neq 0$ hoặc $\mathrm{D}_y \neq 0$: hệ vô nghiệm.

$\mathrm{D} = \mathrm{D}_x = \mathrm{D}_y = 0$: hệ có vô số nghiệm $(x ; y)$ tính theo công thức

$$\begin{cases} x = \dfrac{-by + c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ (nếu } a \neq 0) \text{ hoặc } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-ax + c}{b} \end{cases} \text{ (nếu } b \neq 0).$$

6. Định lí Vi-ét (thuận và đảo)

Hai số x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thoả mãn hai hệ thức Vi-ét sau :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \; ; \; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Định lí Vi-ét có thể ứng dụng để :

– Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai.

– Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng : Nếu hai số đó có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

– Phân tích một tam thức bậc hai thành nhân tử : Nếu tam thức bậc hai

$f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và x_2 (có thể trùng nhau) thì nó có thể phân tích được thành nhân tử như sau :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

– Tính giá trị các biểu thức đối xứng của hai nghiệm của phương trình bậc hai :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \; ; \; P = x_1x_2 = \frac{c}{a};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \; ; \; x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS.$$

– Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai :

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta \geq 0, P > 0$ và $S > 0$.

Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0, P > 0$ và $S < 0$.

7. Giải hệ phương trình bậc hai hai ẩn

1) Hệ phương trình trong đó có một phương trình bậc nhất : Dùng phương pháp thế.

2) Hệ hai phương trình, trong đó mỗi phương trình là đối xứng đối với hai ẩn x và y : Dùng phương pháp đặt ẩn phụ : $S = x + y$; $P = xy$.

II. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

50. $a \neq 0$, hoặc $a = b = 0$.

51. $S = S_1 \cup S_2$.

52. $D \neq 0$, hoặc $D = D_x = D_y = 0$.

Áp dụng. Ta có :

$D = a^2 - 1$; $D_x = a^3 - 1$; $D_y = a(1 - a)$.

Do đó :

– Nếu $a \neq \pm 1$ thì $D \neq 0$ nên hệ có nghiệm (duy nhất).

– Nếu $a = -1$ thì $D = 0$ nhưng $D_x \neq 0$ và $D_y \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

– Nếu $a = 1$ thì $D = D_x = D_y = 0$ nên hệ có (vô số) nghiệm.

Tóm lại, hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a \neq -1$.

53. Chọn (B) : Parabol có đỉnh thuộc trục hoành.

Chú ý. Phương án (A) chỉ đúng nếu $a > 0$; Phương án (C) chỉ đúng nếu $c \neq 0$.

54. Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{m-1}$ nếu $m \neq \pm 1$; vô nghiệm nếu $m = 1$; nghiệm đúng với mọi x nếu $m = -1$.

Gợi ý. $m(mx - 1) = x + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m + 1$.

55. a) $p = -1$, $p = 2$; b) p tuỳ ý ; c) Không có p.

56. Gọi độ dài cạnh ngắn nhất là x (điều kiện : x nguyên dương). Theo giả thiết độ dài hai cạnh kia là $x + 1$ và $x + 2$, trong đó cạnh huyền dài $x + 2$. Theo định lí Py-ta-go, ta có phương trình $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$. Phương trình này tương đương với phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$. Khi đó $x = -1$ (loại) hoặc $x = 3$ (thoả mãn).

Vậy độ dài các cạnh của tam giác vuông là 3, 4 và 5.

57. a) Phương trình vô nghiệm khi $m < 0$; $x = 1$ (nghiệm kép) khi $m = 0$; $x = \dfrac{1}{2}$ khi $m = 1$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{m}}{m-1}$ khi $0 < m \neq 1$.

b) $m > 1$.

c) Trước hết, điều kiện để phương trình có hai nghiệm là $0 \le m \ne 1$. Gọi hai nghiệm là x_1 và x_2. Ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{-2}{m-1}$; $x_1x_2 = \dfrac{-1}{m-1}$. Do đó :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{-2}{m-1}\right)^2 - 2\cdot\frac{-1}{m-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m+1)}{(m-1)^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Giá trị $m = 2 - \sqrt{5} < 0$ nên bị loại. Kết luận : $m = 2 + \sqrt{5}$.

58. Nếu hai phương trình có nghiệm chung x_0 thì xảy ra :

$$x_0^2 + x_0 + a = x_0^2 + ax_0 + 1 \Rightarrow (x_0 - 1)(1 - a) = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ hoặc } a = 1.$$

Nếu $x_0 = 1$ thì do $x_0^2 + x_0 + a = 0$, ta suy ra $a = -2$.

Vậy nếu hai phương trình có nghiệm chung thì $a = -2$ hoặc $a = 1$.

Ngược lại, nếu $a = -2$ thì dễ kiểm tra rằng hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$. Còn nếu $a = 1$ thì cả hai phương trình đều trở thành $x_0^2 + x_0 + 1 = 0$ nên vô nghiệm.

Do đó, chỉ có $a = -2$ là thoả mãn.

59. a) *Giải phần biện luận số nghiệm bằng đồ thị*

• Xét phương trình $x^2 + 3x - m + 1 = 0$. (1)

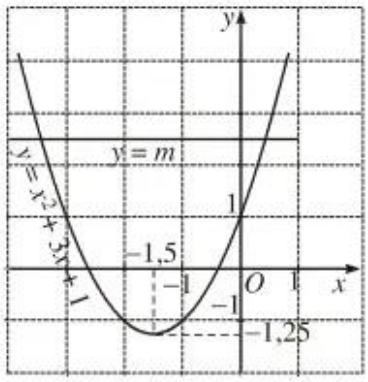
Ta có :

(1) $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = m$.

Gọi (d) là đường thẳng $y = m$. Đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x + 1$ là parabol (P) có đỉnh tại điểm $(-1{,}5 ; -1{,}25)$ và hướng bề lõm lên trên (h. 3.2). Do đó :

– Khi $m < -1{,}25$ thì (d) không cắt (P), phương trình vô nghiệm.

– Khi $m = -1{,}25$ thì (d) và (P) có một điểm chung, phương trình có một nghiệm.



Hình 3.2

– Khi $m > -1,25$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm. Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

• Xét phương trình

$$2x^2 - x + 1 - 2p = 0. \qquad (2)$$

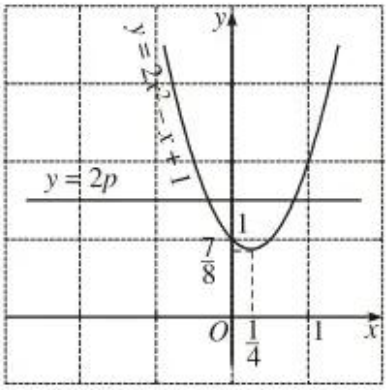
Ta có (2) $\Leftrightarrow$ $2x^2 - x + 1 = 2p$.

Gọi (d) là đường thẳng $y = 2p$, (P) là parabol $y = 2x^2 - x + 1$. Parabol (P) có đỉnh tại điểm $\left(\frac{1}{4} ; \frac{7}{8}\right)$ và hướng bề lõm lên trên (h.3.3). Do đó :

– Nếu $2p < \frac{7}{8}$, tức là $p < \frac{7}{16}$ thì (d) không cắt (P), phương trình vô nghiệm.

– Nếu $2p = \frac{7}{8}$, tức là $p = \frac{7}{16}$ thì (d) và (P) có một điểm chung, phương trình có một nghiệm.

– Nếu $2p > \frac{7}{8}$, tức là $p > \frac{7}{16}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm, phương trình có hai nghiệm.



Hình 3.3

60. a) $S = \{(1 ; 2), (2 ; 1), (-1 ; -2), (-2 ; -1)\}$.

Gợi ý. Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2. \end{cases}$

b) $S = \{(1 ; -1), (-1 ; 1), (0 ; \frac{1}{\sqrt{2}}), (0 ; -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0)\}$.

Gợi ý. Đặt $u = x + y$ và $v = xy$, ta có hệ phương trình ẩn là u và v :

$$\begin{cases} 2u^2 - v = 1 \\ uv = 0. \end{cases}$$

61. a) – Nếu $m \neq 3$ và $m \neq -2$ thì hệ có một nghiệm duy nhất $(x ; y)$, trong đó $x = \frac{m-4}{m-3}$; $y = \frac{1}{m-3}$.

– Nếu $m = 3$ thì hệ vô nghiệm.

– Nếu $m = -2$ thì hệ có vô số nghiệm $(x ; y)$ tính theo công thức

$$\begin{cases} x \in \\ y = \frac{2}{3}x - 1. \end{cases}$$

b) – Nếu $a \neq -3$ và $a \neq 7$ thì hệ có một nghiệm duy nhất $(x ; y)$, trong đó

$$x = y = \frac{a}{a+3}.$$

– Nếu $a = -3$ thì hệ vô nghiệm.

– Nếu $a = 7$ thì hệ có vô số nghiệm $(x ; y)$ tính theo công thức

$$\begin{cases} x \in \\ y = -x + \dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

62. a) Theo định lí Vi-ét đảo, x và y là hai nghiệm của phương trình

$$z^2 - 4z + m = 0. \qquad (1)$$

Ta có $\Delta' = 4 - m$. Do đó :

– Nếu $m > 4$ thì $\Delta' < 0$, phương trình (1) vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

– Nếu $m = 4$ thì $\Delta' = 0$, phương trình (1) có một nghiệm kép $z = 2$ nên hệ đã cho có một nghiệm $(x ; y) = (2 ; 2)$.

– Nếu $m < 4$ thì $\Delta' > 0$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$z = 2 \pm \sqrt{4 - m}$ nên hệ đã cho có hai nghiệm :

$$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{4-m} \\ y = 2 + \sqrt{4-m} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{4-m} \\ y = 2 - \sqrt{4-m}. \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3x - 1 \\ 4x^2 + 4y^2 = 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3x - 1 \\ 4x^2 + (3x-1)^2 = 4m. \end{cases}$$

Xét riêng phương trình $4x^2 + (3x-1)^2 = 4m$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 6x - 4m + 1 = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có biệt thức thu gọn $\Delta' = 4(13m - 1)$. Do đó :

– Nếu $m < \dfrac{1}{13}$ thì $\Delta' < 0$, phương trình (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

– Nếu $m = \dfrac{1}{13}$ thì $\Delta' = 0$, phương trình (2) có một nghiệm $x = \dfrac{3}{13}$ nên hệ có một nghiệm $(x ; y) = \left(\dfrac{3}{13} ; -\dfrac{2}{13}\right)$.

– Nếu $m > \frac{1}{13}$ thì $\Delta' > 0$, phương trình (2) có hai nghiệm

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{13m-1}}{13}$ nên hệ có hai nghiệm :

$(x_1 ; y_1) = \left(\frac{3 - 2\sqrt{13m-1}}{13} ; \frac{-2 - 3\sqrt{13m-1}}{13}\right)$ và

$(x_2 ; y_2) = \left(\frac{3 + 2\sqrt{13m-1}}{13} ; \frac{-2 + 3\sqrt{13m-1}}{13}\right)$.

63. $a = 1 ; b = -2 ; c = -3$.

Giải. Vì điểm $I(1 ; -4)$ là đỉnh của parabol nên

$1 = -\frac{b}{2a}$ và $-4 = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, hay $b = -2a$ và $16a = b^2 - 4ac$.

Vì parabol đi qua điểm $M(2 ; -3)$ nên $-3 = 4a + 2b + c$.

Ta có hệ phương trình (chú ý rằng $a \neq 0$) :

$$\begin{cases} b = -2a \\ 16a = b^2 - 4ac \\ -3 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Khử a trong hệ trên bằng cách thế $2a = -b$, ta được hệ phương trình đối với b và c :

$$\begin{cases} -8b = b^2 + 2bc \\ -3 = -2b + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 8b + 2bc = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2b = 0 \\ c = -3. \end{cases}$$

Nếu $b = 0$ thì $a = 0$, trái với điều kiện $a \neq 0$. Vậy $b = -2$, từ đó suy ra $a = 1$ và hàm số cần tìm là $y = x^2 - 2x - 3$. Từ đây, dễ dàng vẽ đồ thị của nó.

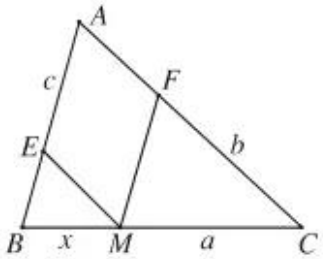
64. Đặt $x = MB$ (điều kiện : $0 < x < a$). Theo định lí Ta-lét ta có (h.3.4) :

$\frac{ME}{x} = \frac{b}{a} \Rightarrow ME = \frac{bx}{a}$;

$\frac{MF}{c} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MF = \frac{c(a-x)}{a}$.

Điều kiện $ME + MF = l$ cho ta phương trình :

$l = \frac{bx}{a} + \frac{c(a-x)}{a} \Leftrightarrow (b-c)x = a(l-c)$. (1)



Hình 3.4

– Nếu $b = c$ (tức là tam giác ABC cân ở A) thì phương trình (1) vô nghiệm nếu $l \neq c$, nghiệm đúng với mọi x nếu $l = c$. Điều này có nghĩa là :

+ Khi tam giác ABC cân tại A và $l \neq AB$ thì không có điểm M nào trên cạnh BC thoả mãn điều kiện của bài toán.

+ Khi tam giác ABC cân tại A và $l = AB$ thì mọi điểm M trên cạnh BC đều thoả mãn điều kiện của bài toán.

– Nếu $b \neq c$ (tức là tam giác ABC không cân ở A) thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a(l-c)}{b-c}$. Xét điều kiện $0 < x < a$:

$$0 < x < a \Leftrightarrow 0 < \frac{a(l-c)}{b-c} < a \Leftrightarrow 0 < \frac{l-c}{b-c} < 1. \qquad (2)$$

Vì $b \neq c$ nên có hai trường hợp :

+ Với $b > c$, ta có :

$$(2) \Leftrightarrow 0 < l - c < b - c \Leftrightarrow c < l < b.$$

+ Với $b < c$, ta có :

$$(2) \Leftrightarrow 0 > l - c > b - c \Leftrightarrow c > l > b.$$

Hai kết quả trên có nghĩa là giá trị $x = \dfrac{a(l-c)}{b-c}$ là nghiệm của bài toán (điểm M cách B một khoảng bằng $\dfrac{a(l-c)}{b-c}$) khi và chỉ khi độ dài l nằm giữa các độ dài b và c.

III. GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

(*Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút*).

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. (*5 điểm*) Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} = 3 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} = -1 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + 4x + 4y = -23 \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$

Câu 2. (*5 điểm*) Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2x - m + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 1$, phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Với giá trị nào của m thì một trong hai nghiệm của phương trình bằng -2 ? Khi đó hãy tìm nghiệm kia.

c) Với giá trị nào của m thì tổng bình phương hai nghiệm của phương trình bằng 6 ?

Đáp án

Câu 1

a) Trong hệ phương trình đã cho, đặt $u = \dfrac{3}{x}$ và $v = \dfrac{2}{y}$, ta có hệ phương trình ẩn u và v là $\begin{cases} 2u + v = 3 \\ u - 2v = -1. \end{cases}$

Ta giải hệ phương trình này bằng phương pháp thế. Từ phương trình thứ hai ta có

$$u = 2v - 1. \qquad (1)$$

Trong phương trình đầu, thay thế u bởi $2v - 1$, ta được

$$2(2v-1) + v = 3 \Leftrightarrow 5v = 5 \Leftrightarrow v = 1.$$

Từ đó và (1) suy ra $u = 1$. Do đó, hệ đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} = 1 \\ \dfrac{2}{y} = 1. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x\,;\,y) = (3\,;\,2)$.

b) Đặt $s = x + y$ và $p = xy$, ta có $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$. Thế vào hệ phương trình đã cho, ta được hệ phương trình ẩn s và p :

$$\begin{cases} p + 4s = -23 \\ s^2 - p = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 - 19 + 4s = -23 \\ p = s^2 - 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2 + 4s + 4 = 0 \\ p = s^2 - 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -2 \\ p = -15. \end{cases}$$

Do đó, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -5 \\ y = 3. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (3 ; –5) và (–5 ; 3).

Câu 2

a) Khi $m \neq 1$, ta có $a \neq 0$ nên phương trình đã cho là một phương trình bậc hai. Hơn nữa, phương trình này có $ac = -(m-1)^2 < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Kí hiệu vế trái của phương trình là $f(x)$.

Phương trình có nghiệm $x = -2$ khi và chỉ khi $f(-2) = 0$, nghĩa là :

$$(m-1)4 - 4 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow 3m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

Khi đó, do tích của hai nghiệm bằng $\frac{c}{a} = -1$ nên nghiệm thứ hai của phương trình là $\frac{1}{2}$.

c) Trên đây, ta đã biết : với $m \neq 1$, phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu. Gọi hai nghiệm ấy là x_1 và x_2. Theo Vi-ét ta có :

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{m-1} \ ; \ x_1x_2 = -1.$$

Do đó, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{4}{(m-1)^2} + 2$;

$x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{4}{(m-1)^2} + 2 = 6 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$.

Trả lời. $m = 0, m = 2$.

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. (*5 điểm*) Giải và biện luận hệ phương trình sau (a là tham số)

$$\begin{cases} ax - 4y = 2 \\ -x + ay = a - 3. \end{cases}$$

Câu 2. (*5 điểm*) Cho phương trình

$$x^2 - (k-3)x - k + 6 = 0. \qquad (1)$$

a) Khi $k = -5$, hãy tìm nghiệm gần đúng của (1) (chính xác đến hàng phần chục).

b) Tuỳ theo k, hãy biện luận số giao điểm của parabol $y = x^2 - (k-3)x - k + 6$ với đường thẳng $y = -kx + 4$.

c) Với giá trị nào của k thì phương trình (1) có một nghiệm dương ?

Đáp án

Câu 1. Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} a & -4 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4 = (a-2)(a+2)\ ;\ D = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ a-3 & a \end{vmatrix} = 2a + 4(a-3) = 6(a-2).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2).$$

Từ đó suy ra :

– Nếu $a \neq \pm 2$ thì $D \neq 0$ và hệ phương trình có một nghiệm $(x\ ;\ y)$, trong đó :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{a+2}\ ;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{a-1}{a+2}.$$

– Nếu $a = 2$ thì $D = D_x = D_y = 0$, hệ trở thành $\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$

và có vô số nghiệm có dạng tổng quát là $(2y + 1\ ;\ y)$ với $y \in \mathbb{R}$.

– Nếu $a = -2$ thì $D = 0$, $D_x \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Kết luận :

– Khi $a \neq \pm 2$, hệ có một nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{6}{a+2} \\ y = \dfrac{a-1}{a+2}. \end{cases}$

– Khi $a = 2$, hệ có vô số nghiệm $(x\ ;\ y)$: $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ y \in \quad . \end{cases}$

– Khi $a = -2$, hệ vô nghiệm.

Câu 2

a) Với $k = -5$, ta có phương trình bậc hai $x^2 + 8x + 11 = 0$. Phương trình này có biệt thức $\Delta' = 5$ nên có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = -4 - \sqrt{5} \approx -6,2 \quad \text{và} \quad x_2 = -4 + \sqrt{5} \approx -1,8.$$

b) Số giao điểm của parabol với đường thẳng đã cho bằng số nghiệm của phương trình

$$x^2 - (k-3)x - k + 6 = -kx + 4. \qquad (2)$$

Ta có $\qquad (2) \Leftrightarrow x^2 + 3x - k + 2 = 0.$

Phương trình bậc hai này có biệt thức $\Delta = 9 - 4(-k + 2) = 4k + 1$. Do đó :

– Nếu $k < -\frac{1}{4}$ thì $\Delta < 0$, phương trình (2) vô nghiệm nên parabol và đường thẳng không có điểm chung.

– Nếu $k = -\frac{1}{4}$ thì $\Delta = 0$, phương trình (2) có một nghiệm nên parabol và đường thẳng có một điểm chung.

– Nếu $k > -\frac{1}{4}$ thì $\Delta > 0$, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt nên parabol và đường thẳng có hai điểm chung.

c) Xét các trường hợp sau :

• Phương trình (1) có nghiệm kép, nghĩa là

$$\Delta = (k-3)^2 + 4(k-6) = k^2 - 2k - 15 = 0 \Leftrightarrow k = -3 \text{ hoặc } k = 5.$$

– Nếu $k = -3$ thì (1) trở thành $x^2 + 6x + 9 = 0$, có một nghiệm âm $x = -3$ (không thoả mãn yêu cầu).

– Nếu $k = 5$ thì (1) trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0$, có một nghiệm dương $x = 1$ (thoả mãn yêu cầu).

• Phương trình (1) có một nghiệm $x = 0$, nghĩa là $k = 6$. Lúc này, phương trình trở thành $x^2 - 3x = 0$, ngoài nghiệm $x = 0$ còn có một nghiệm dương $x = 3$ (thoả mãn yêu cầu).

• Phương trình (1) có một nghiệm âm và một nghiệm dương, tức là hai nghiệm trái dấu. Điều đó xảy ra khi $-k + 6 < 0$ hay $k > 6$.

Tóm lại, các giá trị cần tìm của k là $k = 5$ và $k \geq 6$.