E - GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG IV

I. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất đẳng thức

a) *Một số tính chất của bất đẳng thức*

Giả sử a, b, c, d là những số thực. Khi đó :

$a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$;

$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$;

$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$;

Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$;

Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$;

$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$; $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$;

$\begin{cases} a > b \geq 0 \\ c > d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$;

$a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

$a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$;

$a > b \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$.

b) *Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối*

$\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq |a|$.

$\forall a > 0,$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \ ;$$

$$|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -a \\ x > a. \end{array}\right.$$

$|a + b| \leq |a| + |b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$. Có đẳng thức khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

c) *Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân*

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ với mọi a, b không âm. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ với mọi a, b, c không âm. Có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Các định lí về dấu của nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai

a) Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$. Khi đó

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$af(x)$		$-$	0	$+$	

b) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$af(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ có nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Khi đó,

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$af(x)$		$+$	0	$+$	

• Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ vô nghiệm. Khi đó,

x	$-\infty$		$+\infty$
$af(x)$		$+$	

Tóm lại, *$f(x)$ chỉ khác dấu với hệ số a khi x nằm trong khoảng hai nghiệm của nó* (trong trường hợp tam thức có hai nghiệm phân biệt).

3. Bất phương trình

a) *Bất phương trình tương đương*

• Hai bất phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

• Một bất phương trình được gọi là tương đương với một hệ bất phương trình nếu bất phương trình và hệ bất phương trình đó có cùng một tập nghiệm.

b) *Bất phương trình bậc nhất* $ax + b < 0$

Cách giải. Bất phương trình trên tương đương với bất phương trình $ax < -b$.

– Nếu $a > 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\infty\,;\, -\dfrac{b}{a}\right)$.

– Nếu $a < 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\dfrac{b}{a}\,;\, +\infty\right)$.

c) *Bất phương trình bậc hai, bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức*

Ta xét các bất phương trình có dạng

$$f(x) < 0 \text{ (hoặc } f(x) > 0\text{)},$$

trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai, hoặc là tích của một số hữu hạn nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai, hoặc $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ đều là tích của một số hữu hạn nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai.

Cách giải. Xét dấu biểu thức $f(x)$.

d) *Bất phương trình và phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối và trong dấu căn bậc hai*

• Bất phương trình $|f(x)| + g(x) < 0$ tương đương với

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) + g(x) < 0. \end{cases}$$

• Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x)\,; \end{cases}$$

• Bất phương trình $\sqrt{f(x)} < g(x)$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

• Bất phương trình $\sqrt{f(x)} > g(x)$ tương đương với

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

e) *Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*

• Bất phương trình có dạng

$$ax + by + c > 0 \text{ (hoặc } ax + by + c < 0\text{)},$$

trong đó a, b, c là những số cho trước ; a, b không đồng thời bằng 0 ; x, y là các ẩn, được gọi là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Mỗi cặp số $(x_0 ; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c > 0$ gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$. Tập nghiệm của bất phương trình trên được biểu diễn bởi một tập hợp điểm của mặt phẳng toạ độ. Tập hợp điểm đó được gọi là miền nghiệm của bất phương trình.

• Miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một nửa mặt phẳng.

• Miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

II. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

76. a) Vì hai vế của bất đẳng thức cần chứng minh đều không âm nên bình phương hai vế của nó, ta được bất đẳng thức tương đương

$$(a + b)^2 < (1 + ab)^2. \qquad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(1 - b^2) < 0.$

Từ giả thiết đã cho suy ra $a^2 - 1 < 0$ và $1 - b^2 > 0$. Do đó, bất đẳng thức cuối cùng đúng. Từ đó, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Đặt $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$.

S_n là tổng của n số hạng, trong đó số hạng nhỏ nhất là $\frac{1}{2n}$, các số hạng khác đều lớn hơn $\frac{1}{2n}$. Do đó $S_n \geq \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$.

c) Vì $a \geq 0$ và $b \geq 0$ nên

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

77. a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta được

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad (1)$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad (2)$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}. \quad (3)$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$2(a+b+c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

hay $$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}. \quad (4)$$

(4) là đẳng thức khi và chỉ khi (1), (2), (3) đồng thời là những đẳng thức, tức là $a = b = c$.

b) Vì $x^2 + y^2 \geq 2xy$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, nên với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c,$$

$$b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2bc^2a,$$

$$c^2a^2 + a^2b^2 \geq 2ca^2b.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2abc(b + c + a)$$

hay $$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Tương tự như trong a), có đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

78. a) Vì với mọi $x \neq 0$, x và $\frac{1}{x}$ cùng dấu nên

$$f(x) = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2\sqrt{|x|.\frac{1}{|x|}} = 2 \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $|x| = \frac{1}{|x|}$ hay $|x| = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 2.

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 2.$$

$g(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ là 2.

79. Dễ thấy nghiệm của bất phương trình đầu của hệ đã cho là $x < \frac{23}{2}$.

Bất phương trình thứ hai của hệ tương đương với $(m^2+1)x \geq m^4 - 1$

hay $$x \geq m^2 - 1.$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 - 1 < \frac{23}{2}$

hay $$m^2 < \frac{25}{2} \Leftrightarrow |m| < \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

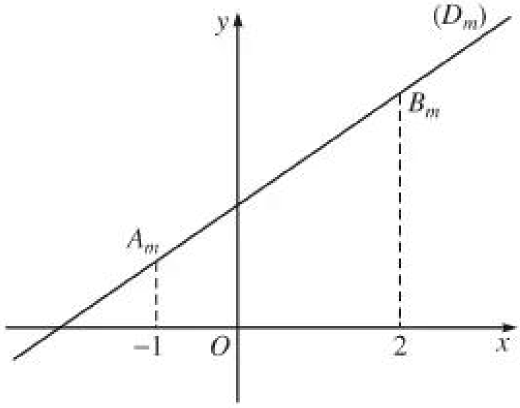
80. Ta viết bất phương trình đã cho dưới dạng $(m^2 + m + 1)x + 3m + 1 > 0$.

Đặt $f(x) = (m^2 + m + 1)x + 3m + 1$. Với mỗi giá trị của m, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng (D_m). Gọi A_m và B_m là các điểm trên đường thẳng (D_m) có hoành độ theo thứ tự là -1 và 2 (h.4.9).

$f(x) > 0$ với mọi $x \in [-1 ; 2]$ khi và chỉ khi đoạn thẳng A_mB_m nằm phía trên trục hoành. Điều này xảy ra khi và chỉ khi hai điểm A_m và B_m nằm phía trên trục hoành, tức là

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(2) > 0. \end{cases}$$

Thay $f(-1) = -m^2 + 2m$ và $f(2) = 2m^2 + 5m + 3$, ta được hệ bất phương trình



Hình 4.9

$$\begin{cases} -m^2 + 2m > 0 \\ 2m^2 + 5m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2.$$

81. a) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$(a^2 - 3a + 2)x > 2.$$

– Nếu $a^2 - 3a + 2 > 0$, tức là $a < 1$ hoặc $a > 2$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > \dfrac{2}{a^2 - 3a + 2}$.

– Nếu $a^2 - 3a + 2 < 0$, tức là $1 < a < 2$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < \dfrac{2}{a^2 - 3a + 2}$.

– Nếu $a^2 - 3a + 2 = 0$, tức là $a = 1$ hoặc $a = 2$ thì bất phương trình đã cho trở thành $0x > 2$. Bất phương trình vô nghiệm.

b) Ta có $\Delta = (m - 9)^2 - 8(m^2 + 3m + 4) = -7(m^2 + 6m - 7)$.

– Nếu $\Delta \leq 0$ hay $m \leq -7$ hoặc $m \geq 1$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

– Nếu $\Delta > 0$ hay $-7 < m < 1$ thì tam thức ở vế trái của bất phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{9 - m - \sqrt{-7(m^2 + 6m - 7)}}{4} \; ; \; x_2 = \frac{9 - m + \sqrt{-7(m^2 + 6m - 7)}}{4}.$$

Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \leq x_1$ hoặc $x \geq x_2$. Vậy

• Nếu $m \leq -7$ hoặc $m \geq 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\mathbb{R}$.

• Nếu $-7 < m < 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\left(-\infty ; \frac{9-m-\sqrt{-7(m^2+6m-7)}}{4}\right] \cup \left[\frac{9-m+\sqrt{-7(m^2+6m-7)}}{4} ; +\infty\right).$$

82. a) $(2 ; 4) \cup (5 ; +\infty)$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$\frac{2x^2-10x+14}{x^2-3x+2} - 1 \geq 0. \qquad (1)$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x < 1$ hoặc $2 < x \leq 3$ hoặc $x \geq 4$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty ; 1) \cup (2 ; 3] \cup [4 ; +\infty)$.

83. a) $m \leq 4 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $m \leq -1$ hoặc $m > 2$.

84. a) $x = \pm 1$ và $x = 5$; b) $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

85. a) $[6 ; 7]$.

b) Dễ thấy $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho. (1)

Với $x \neq 2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x-2 > 0 \\ \sqrt{x^2+4} \leq x+2 \end{cases} \text{ hoặc } (\mathrm{II}) \begin{cases} x-2 < 0 \\ \sqrt{x^2+4} \geq x+2. \end{cases}$$

Ta có :

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2+4 \leq (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2. \qquad (2)$$

Hệ (II) tương đương với

$$\text{(III)} \begin{cases} x < 2 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \quad \text{(IV)} \begin{cases} x < 2 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 4 \geq (x+2)^2. \end{cases}$$

Giải riêng từng hệ (III) và (IV), ta có :

$$\text{(III)} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$$

$$\text{(IV)} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0.$$

Do đó, nghiệm của hệ (II) là $x \leq 0$. (3)

Phối hợp các kết quả (1), (2), (3), ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty ; 0] \cup [2 ; +\infty)$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\text{(I)} \begin{cases} x^2 - 8x \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \text{(II)} \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 8x \geq 4(x+1)^2. \end{cases}$$

Ta có :

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 8 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 + 16x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \dfrac{-8 - 2\sqrt{13}}{3} \leq x \leq \dfrac{-8 + 2\sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2\sqrt{13} - 8}{3}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$(-\infty ; -1) \cup \left[-1 ; \frac{2\sqrt{13} - 8}{3}\right] = \left(-\infty ; \frac{2\sqrt{13} - 8}{3}\right].$$

d) $[-4 ; -3] \cup [0 ; 1]$. *Hướng dẫn*. Đặt $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ $(y \geq 0)$, ta được bất phương trình $y \leq 6 - y^2$ hay $y^2 + y - 6 \leq 0$.

86. a) Bất phương trình đầu của hệ đã cho có nghiệm là $2 < x < 3$.

Bất phương trình thứ hai của hệ tương đương với bất phương trình $ax < -4$.

– Nếu $a = 0$ thì bất phương trình này vô nghiệm. Do đó, hệ vô nghiệm.

– Nếu $a > 0$ thì nghiệm của bất phương trình này là $x < -\frac{4}{a}$. Vì $-\frac{4}{a} < 0$ nên hệ vô nghiệm.

– Nếu $a < 0$ thì nghiệm của bất phương trình này là $x > -\frac{4}{a}$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{4}{a} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{4}{3}$.

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a < -\frac{4}{3}$.

b) Bất phương trình đầu của hệ có nghiệm là $x > 1$.

Xét bất phương trình thứ hai của hệ. Ta có $\Delta' = a^2 - 1$.

• $\Delta' = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

– Với $a = 1$, nghiệm của bất phương trình là $x = 1$. Do đó, hệ vô nghiệm.

– Với $a = -1$, nghiệm của bất phương trình là $x = -1$. Do đó, hệ vô nghiệm.

• Nếu $\Delta' < 0$ hay $-1 < a < 1$ thì bất phương trình này vô nghiệm. Do đó, hệ vô nghiệm.

• Nếu $\Delta' > 0$ hay $a < -1$ hoặc $a > 1$ thì tam thức ở vế trái của bất phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Nghiệm của bất phương trình này là

$$x_1 \le x \le x_2 \text{ (giả sử } x_1 < x_2).$$

Theo định lí Vi-ét , ta có $x_1x_2 = 1$ và $x_1 + x_2 = 2a$.

– Nếu $a < -1$ thì cả hai nghiệm x_1 và x_2 đều âm. Do đó, hệ đã cho vô nghiệm.

– Nếu $a > 1$ thì hai nghiệm x_1 và x_2 đều dương. Ngoài ra, vì $x_1x_2 = 1$ và $x_1 \neq x_2$ nên $x_1 < 1 < x_2$. Do đó, hệ có nghiệm.

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $a > 1$.

87. a) (C) ; b) (B) ; c) (D).

88. a) (A) ; b) (B) ; c) (C).

89. a) (C) ; b) (B) ; c) (D).

III. GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

(Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút).

ĐỀ SỐ 1

Với mỗi câu **1**, **2**, **3** dưới đây, trong các phương án đã cho chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng đó.

Câu 1. (*1 điểm*) Tam thức bậc hai

$$f(x) = (1+\sqrt{2})x^2 + (3+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

(A) Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$; (B) Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$;

(C) Âm với mọi $x \in (-\sqrt{2}\,;\, 1-\sqrt{2})$; (D) Âm với mọi $x \in \left(-\sqrt{3}\,;\, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Câu 2. (*1 điểm*) Tập nghiệm của bất phương trình

$$x^2 + (1-\sqrt{3})x - 6 - 2\sqrt{3} \le 0 \text{ là}$$

(A) $[\sqrt{3}\,;\, 1+\sqrt{3}]$; (B) $[-1-\sqrt{3}\,;\, 2\sqrt{3}]$;

(C) $\left[-\sqrt{3}\,;\, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$; (D) $[-1-\sqrt{3}\,;\, +\infty)$.

Câu 3. (*1 điểm*) Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x-2} \ge 6 - x$ là

(A) $[7\,;\, +\infty)$; (B) $\left[\dfrac{13-\sqrt{17}}{2}\,;\, \dfrac{13+\sqrt{17}}{2}\right]$;

(C) $[4\,;\, +\infty)$; (D) $\left[\dfrac{13-\sqrt{17}}{2}\,;\, +\infty\right)$.

Câu 4. (*3 điểm*) Chứng minh rằng

$$2a^2 + b^2 + c^2 \ge 2a(b+c) \text{ với mọi } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Khi nào có đẳng thức ?

Câu 5. (*4 điểm*) Tìm các giá trị của m sao cho hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{x}{4} + 1 \\ x^2 - 2mx - 2m - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Đáp án

Câu 1. (C) ; **Câu 2.** (B) ; **Câu 3.** (D).

Câu 4. Ta có

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad (1)$$

$$a^2 + c^2 \geq 2ac, \quad (2)$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Cộng từng vế hai bất đẳng thức (cùng chiều) trên, ta được

$$2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac$$

hay
$$2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c). \quad (3)$$

(3) là đẳng thức khi và chỉ khi (1) và (2) đều là những đẳng thức, tức là $a = b = c$.

Câu 5. Dễ thấy tập nghiệm của bất phương trình đầu của hệ đã cho là $[2 ; +\infty)$. Tam thức ở vế trái của bất phương trình thứ hai của hệ có nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = 2m + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình thứ hai là đoạn có hai đầu mút là x_1 và x_2. Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x_2 \geq 2$ hay $2m + 1 \geq 2$, tức là $m \geq \dfrac{1}{2}$.

ĐỀ SỐ 2

Với mỗi câu **1**, **2**, **3** dưới đây, trong các phương án đã cho chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng đó.

Câu 1. (*1 điểm*) Tập nghiệm của bất phương trình

$$x^2 + 2(\sqrt{5} - 1)x - 3(5 + 2\sqrt{5}) \leq 0 \text{ là}$$

(A) $[-3\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}]$;

(B) $\left[-3\sqrt{5} ; -\frac{1}{2}\right]$;

(C) $\left[\frac{1}{2} ; \sqrt{5}\right]$;

(D) $[-3\sqrt{5} ; \sqrt{5}]$.

Câu 2. (*1 điểm*) Tập xác định của hàm số

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2}} \quad \text{là}$$

(A) $[-5 ; 4]$;

(B) $(-\infty ; -5] \cup [4 ; +\infty)$;

(C) $(-\infty ; 1] \cup [4 ; +\infty)$;

(D) $(-\infty ; -5) \cup [-1 ; +\infty)$.

Câu 3. (*1 điểm*) Phương trình

$$(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$$

vô nghiệm khi và chỉ khi

(A) $m \leq -4$ hoặc $m > 2$;

(B) $m \leq -4$ hoặc $m \geq 2$;

(C) $m < -4$ hoặc $m \geq 2$;

(D) $m < -4$ hoặc $m > 2$.

Câu 4. (*3 điểm*) Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{R}.$$

Câu 5. (*4 điểm*) Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25} < x^2 - 4.$$

Đáp án

Câu 1. (A) ; **Câu 2.** (B) ; **Câu 3.** (C).

Câu 4. Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức cho trường hợp a và b là những số không âm. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng. Do đó, khi a và b là hai số không âm, ta có

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

Với a, b tuỳ ý, từ kết quả trên ta có

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2}{2}} \geq \frac{|a|+|b|}{2} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Câu 5. Vì $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$ nên bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $|x-5| < x^2 - 4$.

Bất phương trình trên tương đương với

$$\text{(I)} \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ x - 5 < x^2 - 4 \end{cases} \text{ hoặc (II) } \begin{cases} x - 5 < 0 \\ 5 - x < x^2 - 4. \end{cases}$$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5. \qquad (1)$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x^2 + x - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x < \dfrac{-1-\sqrt{37}}{2} \text{ hoặc } x > \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-1-\sqrt{37}}{2} \text{ hoặc } \frac{-1+\sqrt{37}}{2} < x < 5. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\left(-\infty ; \frac{-1-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2} ; 5\right) \cup [5 ; +\infty) =$$

$$= \left(-\infty ; \frac{-1-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2} ; +\infty\right).$$