E - GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG VI

I. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Số đo, độ dài của cung tròn

Cung tròn bán kính R, có độ dài l, có số đo rađian là α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo a^{o} ($0 \leq a \leq 360$) thì

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}, \qquad l = \mathrm{R}\alpha.$$

Góc và cung lượng giác

• Nếu một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α rađian thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu Ou, tia cuối Ov có số đo $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mỗi góc ứng với một giá trị của k. Các cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{UV}$ tương ứng trên đường tròn định hướng tâm O cũng có tính chất tương tự.

• Khi $0 \leq \alpha < 2\pi$ thì α là số đo rađian của cung lượng giác tạo bởi điểm M di động trên đường tròn định hướng tâm O luôn theo chiều dương từ điểm U đến gặp điểm V lần đầu tiên ; α cũng là số đo rađian của cung tròn $\overset{\frown}{UV}$ đó.

• Khi $-\pi < \alpha \leq \pi$ thì $|\alpha|$ là số đo rađian của góc hình học uOv.

• Hệ thức Sa-lơ : Với ba tia tuỳ ý Ou, Ov, Ow, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Đường tròn lượng giác

• Đường tròn lượng giác : Đường tròn đơn vị ($R = 1$), định hướng, với điểm gốc A.

• Hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với đường tròn lượng giác : O là tâm đường tròn, Ox là tia OA, $\text{sđ}(Ox, Oy) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

• Cung lượng giác α : Cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ (trên đường tròn lượng giác) có số đo α.

Góc lượng giác α : Góc lượng giác (OA, OM) có số đo α.

Điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi số (cung hoặc góc) α : Điểm M sao cho $\overset{\curvearrowright}{AM}$ là cung lượng giác α hoặc (OA, OM) là góc lượng giác α.

Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

• Cho góc lượng giác α, xét điểm M trên đường tròn lượng giác xác định bởi α. Nếu M có toạ độ $(x \,;\, y)$ trong hệ toạ độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ gắn với đường tròn đó thì $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$. Nói cách khác $\overrightarrow{OM} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$.

• $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (khi $\cos\alpha \neq 0$) ; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (khi $\sin\alpha \neq 0$).

• Một số tính chất cơ bản :

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$;

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$ (với $k \in \mathbb{Z}$) ;

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$;

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (khi $\cos\alpha \neq 0$) ; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (khi $\sin\alpha \neq 0$);

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

• Góc hình học uOv có số đo α rad $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ thì các tỉ số lượng giác côsin, sin, tang, côtang của $\widehat{uOv}$ theo thứ tự bằng $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$. (Khi nói về $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, ta giả sử chúng xác định).

• Với mọi góc lượng giác (Ou, Ov), ta có

$$\cos(Ou, Ov) = \cos\widehat{uOv}\ ;\ |\sin(Ou, Ov)| = \sin\widehat{uOv}.$$

Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt (giả sử các biểu thức có nghĩa)

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

  $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$.

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$;

  $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$; $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$.

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$.

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$.

Một số công thức lượng giác (giả sử các biểu thức có nghĩa)

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

  $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$; $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$.

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$;

  $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

  $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

  $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

  $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

  $\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

  $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

  $\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

II. GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG VI

55. a) Đúng, thử với k chẵn và k lẻ ;

b) Đúng, thử với k chẵn và k lẻ.

c) Đúng, thử với $k = 0, 1, 2, 3$.

d) Sai, khi $k = 1$, vế trái là $\frac{\sqrt{2}}{2}$, vế phải là $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

56. a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ thì $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{25}$;

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

b) $\tan\alpha > 0$ nên $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{10}}{9}$;

$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{121-36\sqrt{10}}{41}$.

c) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$

$$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}.$$

d) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{9};$ (1)

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{4}.$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được

$1 + 1 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$. Từ đó $\cos(\alpha - \beta) = \frac{59}{72}$.

e) $\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{7\pi}{16} = \sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}.$$

57. a) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha).\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)\right]$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

b) $\sin\alpha\,(1 + \cos 2\alpha) = \sin\alpha\,(1 + 2\cos^2\alpha - 1) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \sin 2\alpha\cos\alpha.$

c) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha + (1 + \cos 2\alpha)} = \dfrac{\sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha}$

$$= \frac{2\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \tan\alpha.$$

d) $\tan\alpha - \dfrac{1}{\tan\alpha} = 2.\dfrac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha} = -\dfrac{2}{\tan 2\alpha}.$

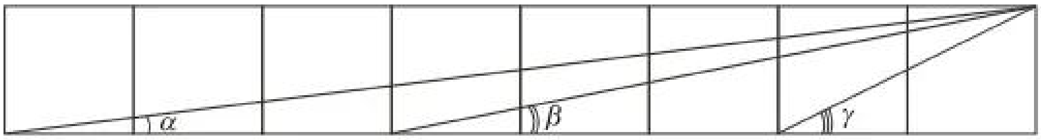
58. a) $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \tan(k\pi) = 0 \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) + \tan\gamma = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} + \tan\gamma = 0$ (để ý rằng $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ do $\cos\gamma \neq 0$)

$\Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

b) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{3}$; $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}}=1$.

Nhận xét. Có thể chuyển câu b) thành một bài toán hình học : Chứng minh rằng tổng các góc α, β, γ trong hình 6.9 bằng $\dfrac{\pi}{4}$.



Hình 6.9

c) $$\frac{1}{\sin 10^o}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^o}=\frac{\cos 10^o-\sqrt{3}\sin 10^o}{\sin 10^o\cos 10^o}$$
$$=\frac{2(\cos 60^o\cos 10^o-\sin 60^o\sin 10^o)}{\sin 10^o\cos 10^o}$$
$$=\frac{2\cos(60^o+10^o)}{\frac{1}{2}\sin 20^o}=\frac{4\cos 70^o}{\sin 20^o}=\frac{4\cos 70^o}{\cos 70^o}=4.$$

59. Cộng vế với vế ba đẳng thức

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha-\sin 2\beta),$$

$$\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)=\frac{1}{2}(\sin 2\beta-\sin 2\gamma),$$

$$\cos(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}(\sin 2\gamma-\sin 2\alpha),$$

ta được đẳng thức cần chứng minh.

60. (B); **61.** (C); **62.** (B); **63.** (D); **64.** (A); **65.** (C); **66.** (D); **67.** (A);

68. (D) (lưu ý rằng có $k\in\mathbb{Z}$ để $\pi+k2\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$.

Từ đó $\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$);

69. (D) (lưu ý rằng có $k\in\mathbb{Z}$ để $k2\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Từ đó $k4\pi<2\alpha<\pi+k4\pi$).

III. GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG VI

(Thời gian làm bài cho mỗi đề là 45 phút).

ĐỀ SỐ 1

Câu 1. *(3 điểm)* Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo -1955^o.

a) Tìm góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho và có số đo là số dương nhỏ nhất.

b) Tìm số đo góc hình học uOv.

Câu 2. *(3 điểm)* Chứng minh rằng với mọi α, ta có :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Câu 3. *(4 điểm)* Chứng minh rằng :

$$\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16}.$$

Đáp án

Câu 1

a) Do $-1955^o = -6.360^o + 205^o$, $0^o < 205^o < 360^o$ nên 205^o là số đo góc lượng giác (Ou, Ov) cần tìm.

b) Có thể viết $-1955^o = -5 \,.\, 360^o - 155^o$, $0^o < 155^o < 180^o$ nên góc hình học uOv có số đo 155^o.

Câu 2. $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) =$

$$= \cos^2\alpha + \left(\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

$$= \cos^2\alpha + \left(-\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2$$

$$= \cos^2\alpha + 2\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) = \frac{3}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{3}{2}.$$

Câu 3. *Cách 1*

$$\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = \sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right).\left(\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{16}.$$

Cách 2

$$\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{24}-\cos\frac{12\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{12};$$

$$\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{24}-\cos\frac{12\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}.$$

Vậy $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = \frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{4\pi}{12}+\cos\frac{6\pi}{12}\right) = \frac{1}{8}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{16}.$$

ĐỀ SỐ 2

Câu 1. *(5 điểm)* Cho góc lượng giác α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Giả sử đã biết $\tan\alpha + \cot\alpha = m$, hãy tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ theo m.

Câu 2. *(3 điểm)* Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, luôn có

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$$

Câu 3. (*2 điểm*) Tính

$$\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{5\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{11\pi}{18} + \sin^2\frac{13\pi}{18} + \sin^2\frac{2\pi}{9}.$$

Đáp án

Câu 1. $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=m \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=m \Leftrightarrow \sin 2\alpha=\frac{2}{m}$$

(để ý rằng do $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ đều dương nên $m>0$).

Ta có $\cos^2 2\alpha=1-\frac{4}{m^2}=\frac{m^2-4}{m^2}$. Từ đó :

– Khi $0<\alpha\le\frac{\pi}{4}$ thì $0<2\alpha\le\frac{\pi}{2}$ nên $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{m^2-4}}{m}$ (để ý thêm rằng do $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ đều dương mà $\tan\alpha\cot\alpha=1$ nên $\tan\alpha+\cot\alpha=m\ge 2$).

– Khi $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ thì $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$, $\cos 2\alpha<0$ nên $\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{m^2-4}}{m}$.

Câu 2. Vì $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ đều là các góc nhọn và $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$ nên

$$\tan\frac{C}{2}=\cot\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}=\frac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}.$$

Từ đó $\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$,

tức là $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$

Câu 3. Dễ thấy

$$\sin^2\frac{11\pi}{18}=\cos^2\frac{\pi}{9},\ \sin^2\frac{13\pi}{18}=\cos^2\frac{2\pi}{9}$$

nên tổng đã cho bằng 3.