# GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

**1.** a) $a \le -1$ và $b > 1$ ;

b) $c < -1$ ;

c) $(-\infty ; a) \cup [b ; +\infty)$ ;

d) $a \le 1$, $b > -1$ và $a < b$.

**2.** a) $\mathcal{D} = (-\infty ; 0] \cup (2 ; +\infty)$ ; hàm số không chẵn, không lẻ ;

b) $\mathcal{D} = (-\infty ; 3) \cup (4 ; +\infty)$ ; hàm số không chẵn, không lẻ ;

c) $\mathcal{D} = (-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty) \setminus \left\{-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{3}{2}\right\}$ ; hàm số chẵn.

d) $\mathcal{D} = [-1 ; 1]$ ; hàm số lẻ.

**3.** a) $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow m = -1$ ; b) $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow m = 1$ ;

c) $(d_1)$ cắt $(d_2) \Leftrightarrow m \ne -1$.

**4.** a) Vì hàm số $y = \dfrac{2}{x}$ là hàm số lẻ.

b) Tịnh tiến $(H_0)$ sang phải 3 đơn vị. Tâm đối xứng của $(H_1)$ là $(3 ; 0)$.

c) Tịnh tiến $(H_0)$ xuống dưới 2 đơn vị. Tâm đối xứng của $(H_2)$ là $(0 ; -2)$.

*Gợi ý*. Ta có thể viết $\dfrac{2 - 2x}{x} = \dfrac{2}{x} - 2$.

**5.** a) Đồ thị (h.1).

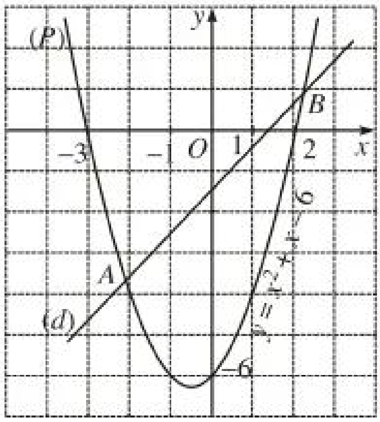
Giáo viên tự lập bảng biến thiên.

b) Số giao điểm của parabol $(P)$ với đường thẳng $(d)$ đúng bằng số nghiệm của phương trình

$x^2 + x - 6 = 2x + m$ hay $x^2 - x - 6 - m = 0$. (1)

Phương trình (1) có biệt thức

$\Delta = 1 + 4(6 + m) = 4m + 25$. Do đó




*Hình 1*

– Nếu $m < -\frac{25}{4}$ thì $\Delta < 0$, phương trình (1) vô nghiệm. Do đó, $(P)$ và $(d)$ không có điểm chung.

– Nếu $m = -\frac{25}{4}$ thì $\Delta = 0$, phương trình (1) có một nghiệm (kép). Do đó, $(P)$ và $(d)$ có một điểm chung.

– Nếu $m > -\frac{25}{4}$ thì $\Delta > 0$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Do đó, $(P)$ và $(d)$ có hai điểm chung phân biệt.

c) Giả sử $(P)$ và $(d)$ cắt nhau tại hai điểm $A$ và $B$ phân biệt. Khi đó, hoành độ của $A$ và $B$ chính là hai nghiệm của phương trình (1), gọi chúng là $x_1$ và $x_2$. Hơn nữa, $A$ và $B$ là hai điểm của đường thẳng $(d)$ nên toạ độ của chúng là

$$A(x_1\,;\,2x_1 + m) \text{ và } B(x_2\,;\,2x_2 + m), \left(m > -\frac{25}{4}\right).$$

Vậy trung điểm $I$ của đoạn thẳng $AB$ có toạ độ là $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\,;\,x_1 + x_2 + m\right)$.

Theo định lí Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 1$. Toạ độ của $I$ là $I\left(\frac{1}{2}\,;\,1 + m\right)$ với $m > -\frac{25}{4}$.

**6.** a) $k = 1$ và $k = -7$. *Gợi ý.* $\Delta = -7(k^2 + 6k - 7)$.

b) Khi $k = -\sqrt{7}$ thì $\Delta = 42\sqrt{7}$, phương trình có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{7} - \sqrt{42\sqrt{7}}}{4} \approx 0{,}276\,;\; x_2 = \frac{9 + \sqrt{7} + \sqrt{42\sqrt{7}}}{4} \approx 5{,}547.$$

**7.** a) 22,93. *Gợi ý :* $x_1 + x_2 = -2(\sqrt{3} + 1)\,;\; x_1x_2 = 2\sqrt{3}$.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1x_2 = 4(\sqrt{3} + 1)^2 - 4\sqrt{3} = 4(4 + \sqrt{3}).$$

b) $x_1 \approx -0{,}73\,;\; x_2 \approx -4{,}73$.

**8.** a) Số nghiệm và dấu các nghiệm của phương trình phụ thuộc vào dấu của các biểu thức sau :

$$\Delta' = 4(m + 3)^2 - 6(m^2 - 5m + 6) = -2m^2 + 54m,$$
$$\frac{c}{a} = 6(m^2 - 5m + 6)\,; \qquad -\frac{b}{a} = 4(m + 3).$$

Ta lập bảng xét dấu của các biểu thức này :

| $m$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $27$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta' = -2m^2 + 54m$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\dfrac{c}{a} = 6(m^2 - 5m + 6)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-\dfrac{b}{a} = 4(m + 3)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |

Bảng trên dẫn đến kết luận sau :

– Nếu $m < 0$ hoặc $m > 27$ thì $\Delta' < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

– Nếu $m = 0$ hoặc $m = 27$ thì $\Delta' = 0$, $\dfrac{c}{a} > 0$ và $-\dfrac{b}{a} > 0$ nên phương trình có một nghiệm dương (nghiệm kép).

– Nếu $0 < m < 2$ hoặc $3 < m < 27$ thì $\Delta' > 0$, $\dfrac{c}{a} > 0$ và $-\dfrac{b}{a} > 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

– Nếu $2 < m < 3$ thì $\dfrac{c}{a} < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu.

– Nếu $m = 2$ hoặc $m = 3$ thì $\dfrac{c}{a} = 0$ và $-\dfrac{b}{a} > 0$ nên phương trình có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

b) Khi $m = 1$, ta có phương trình $2x - 4 = 0$. Phương trình có một nghiệm dương. Khi $m \neq 1$, ta có phương trình bậc hai. Số nghiệm và dấu của các nghiệm phụ thuộc vào dấu của các biểu thức sau :

$$\Delta = (m-3)^2 + 4(m-1)(m+3) = 5m^2 + 2m - 3\ ;$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-m-3}{m-1}\ ; \qquad -\frac{b}{a} = \frac{m-3}{m-1}.$$

Ta lập bảng xét dấu của các biểu thức này :

| $m$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $\frac{3}{5}$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta = 5m^2 + 2m - 3$ | | + | | + | 0 | − | 0 | + | | + | | + | |
| $\frac{c}{a} = \frac{-m-3}{m-1}$ | | − | 0 | + | | + | | + | ‖ | − | | − | |
| $-\frac{b}{a} = \frac{m-3}{m-1}$ | | + | | + | | + | | + | ‖ | − | 0 | + | |

Từ bảng xét dấu, ta suy ra :

1) Nếu $-1 < m < \frac{3}{5}$ thì $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

2) Nếu m $< -3$ hoặc $m > 1$ thì $\frac{c}{a} < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu.

3) Nếu $-3 < m < -1$ hoặc $\frac{3}{5} < m < 1$ thì $\Delta > 0$, $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

4) Nếu $m = -3$ thì $\frac{c}{a} = 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có một nghiệm $x = 0$, và một nghiệm dương $\left(x = \frac{3}{2}\right)$.

5) Nếu $m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{5}$ thì $\Delta = 0$, $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có một nghiệm (kép) dương.

**9.** a) Với điều kiện $x \neq -1$, phương trình đã cho tương đương với

$$mx - m - 3 = x + 1 \Leftrightarrow (m-1)x = m + 4. \quad (1)$$

Nếu $m = 1$ thì (1) vô nghiệm, kéo theo phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{m+4}{m-1}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu nó thoả mãn $x \neq -1$, tức là

$$\frac{m+4}{m-1} \neq -1 \Leftrightarrow m + 4 \neq -m + 1 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}.$$

*Kết luận*. Phương trình đã cho :

– Có nghiệm $x = \dfrac{m+4}{m-1}$ nếu $m \neq 1$ và $m \neq -\dfrac{3}{2}$ ;

– Vô nghiệm nếu $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{3}{2}$.

b) Ta có $\quad |(m+1)x - 3| = |x+2|$

$$\Leftrightarrow (m+1)x - 3 = x + 2 \text{ hoặc } (m+1)x - 3 = -(x+2).$$

(1) $(m+1)x - 3 = x + 2 \Leftrightarrow mx = 5$. Phương trình này có nghiệm $x = \dfrac{5}{m}$ nếu $m \neq 0$ và vô nghiệm nếu $m = 0$.

(2) $(m+1)x - 3 = -(x+2) \Leftrightarrow (m+2)x = 1$. Phương trình này có nghiệm $x = \dfrac{1}{m+2}$ nếu $m \neq -2$ và vô nghiệm nếu $m = -2$.

Để kết luận, ta lập bảng sau :

| $m$ | Nghiệm của (1) | Nghiệm của (2) | Nghiệm của PT đã cho |
|---|---|---|---|
| $m \neq 0$ và $m \neq -2$ | $\dfrac{5}{m}$ | $\dfrac{1}{m+2}$ | $\dfrac{5}{m}$ ; $\dfrac{1}{m+2}$ |
| $m = 0$ | vô nghiệm | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ |
| $m = -2$ | $-\dfrac{5}{2}$ | vô nghiệm | $-\dfrac{5}{2}$ |

c) Với điều kiện $x \geq 1$, ta có

$$(mx+1)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow mx + 1 = 0 \text{ hoặc } x - 1 = 0.$$

(1) $mx + 1 = 0 \Leftrightarrow mx = -1$. Phương trình này vô nghiệm nếu $m = 0$ và có nghiệm $x = -\dfrac{1}{m}$ nếu $m \neq 0$. Giá trị này còn phải thoả mãn điều kiện $x \geq 1$, tức là $-\dfrac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{m} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.

(2) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thoả mãn điều kiện $x \geq 1$).

Kết luận :

| $m$ | Nghiệm của (1) | Nghiệm của (2) | Nghiệm của PT đã cho |
|---|---|---|---|
| $-1 \le m < 0$ | $-\dfrac{1}{m}$ | 1 | $-\dfrac{1}{m}$ ; 1 |
| $m < -1$ hoặc $m \ge 0$ | vô nghiệm | 1 | 1 |

**10.** a) Đặt $S = x_1 + x_2$ và $P = x_1x_2$. Các điều kiện của bài toán được thể hiện qua hệ phương trình (ẩn $S$ và $P$)

$$\begin{cases} S + P = 0 \\ mS - P = 3m + 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = 0 \\ S(m + 1) = 3m + 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Khi $m = -1$, hệ (1) vô nghiệm, nghĩa là không có phương trình nào thoả mãn điều kiện của bài toán.

Khi $m \neq -1$, hệ (1) có một nghiệm $(S\,;P) = \left(\dfrac{3m+4}{m+1}\,;-\dfrac{3m+4}{m+1}\right)$. $\qquad$ (2)

Vậy phương trình cần tìm là $x^2 - Sx + P = 0$, hay $x^2 - \dfrac{3m+4}{m+1}x - \dfrac{3m+4}{m+1} = 0$, hay

$$(m+1)x^2 - (3m+4)x - (3m+4) = 0. \qquad (3)$$

Điều kiện để phương trình (3) có nghiệm là

$$\Delta = (3m+4)^2 + 4(m+1)(3m+4) = (3m+4)(7m+8) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow\ m \le -\frac{4}{3} \text{ hoặc } m \ge -\frac{8}{7}. \qquad (4)$$

Tóm lại, phương trình cần tìm là phương trình (3) với điều kiện của $m$ là $m \neq -1$ và thoả mãn (4).

b) Dễ thấy

$$S = -P = \frac{3m+4}{m+1} > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3} \text{ hoặc } m > -1.$$

Kết hợp với điều kiện (4), ta suy ra :

– Nếu $m < -\dfrac{4}{3}$ hoặc $m > -1$ thì $P < 0$ nên (3) có hai nghiệm trái dấu ;

– Nếu $m = -\frac{4}{3}$ thì phương trình (3) có một nghiệm (kép) $x = 0$ ;

– Nếu $-\frac{8}{7} \leq m < -1$ thì $P > 0, S < 0$ nên phương trình (3) có hai nghiệm âm ;

– Nếu $-\frac{4}{3} < m < -\frac{8}{7}$ thì phương trình (3) vô nghiệm.

**11.** a) $(x ; y) = \left(\frac{m+2}{m-1} ; \frac{-3(m+1)}{m-1}\right)$ nếu $m \neq 1$ ;

Vô số nghiệm $(x ; -2x + \frac{1}{2})$ với $x \in \mathbb{R}$ nếu $m = 1$.

b) $(x ; y) = (3 ; -m-4)$ nếu $m \neq -4$ ;

Vô số nghiệm $(x ; x-3)$ nếu $m = -4$.

**12.** a) $(1 ; -1), \left(-\frac{2}{5} ; \frac{9}{5}\right)$; b) $(2 ; 1), (1 ; 2)$.

c) $(-1 ; 0), (0 ; 1)$.

*Gợi ý. Cách 1 :* Đặt $z = -x$, ta đưa về dạng hệ phương trình đối xứng đối với $z$ và $y$. *Cách 2*. Đặt $S = x - y$ và $P = xy$.

**13.** a) *Gợi ý*. Đặt $x = \sqrt{a^2 + 2}$, ta có $x \geq \sqrt{2}$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x^2 + 4}{x} \geq 4 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

b) *Gợi ý*. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}.\frac{b^2}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geq 2\frac{a}{c}$.

Tương tự, ta có

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2\frac{b}{a} \text{ và } \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{c}{b}.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức thu được, ta được điều phải chứng minh.

**14.** a) $2(\sqrt{2} - 1)$. *Gợi ý*. Trên khoảng $(-2 ; +\infty)$, ta có $x + 2 > 0$. Do đó

$$x + \frac{2}{x+2} = (x+2) + \frac{2}{x+2} - 2 \geq 2\sqrt{(x+2).\frac{2}{x+2}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

b) $3\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$. *Gợi ý*. Trên khoảng $(0\,;+\infty)$, ta có $x>0$ nên

$$3x^2+\frac{1}{x}=3x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\ge 3\sqrt[3]{3x^2.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

**15.** $\dfrac{25}{8}$. *Gợi ý. Cách 1 :* Trên khoảng $(-0{,}5\,;2)$, ta có $2-x>0$ và $2x+1>0$. Do đó

$$(2-x)(2x+1)=2(2-x)(x+\frac{1}{2})\le 2\left[\frac{1}{2}\left((2-x)+(x+\frac{1}{2})\right)\right]^2=\frac{25}{8}.$$

*Cách 2.* $g(x)=(2-x)(2x+1)=-2x^2+3x+2$, đây là hàm số bậc hai, đồ thị của nó là một parabol có đỉnh tại điểm $\left(\dfrac{3}{4}\,;\dfrac{25}{8}\right)$ và hướng bề lõm xuống dưới. Do đó, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{25}{8}$ tại $x=\dfrac{3}{4}$. Vì $\dfrac{3}{4}\in(-0{,}5\,;2)$ nên đó cũng chính là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng đã cho.

**16.** a) Ta giải từng bất phương trình trong hệ đã cho :

1) $x^2-4>0 \Leftrightarrow x<-2$ hoặc $x>2$.

Tập nghiệm là $S_1=(-\infty\,;-2)\cup(2\,;+\infty)$.

2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\ge\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x(x+2)+x(x+1)-(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)}\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x(x+1)(x+2)}\ge 0.$$

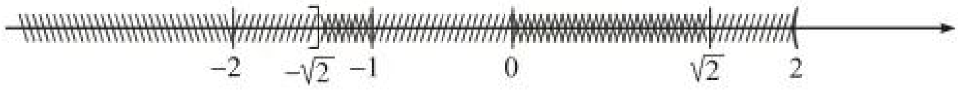
Lập bảng xét dấu vế trái :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2$ | | + | \| | + | 0 | − | \| | − | \| | − | 0 | + | |
| $x(x+1)$ | | + | \| | + | \| | + | 0 | − | 0 | + | \| | + | |
| $x+2$ | | − | 0 | + | \| | + | \| | + | \| | + | \| | + | |
| Vế trái | | − | \|\| | + | 0 | − | \|\| | + | \|\| | − | 0 | + | |

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình thứ hai của hệ là

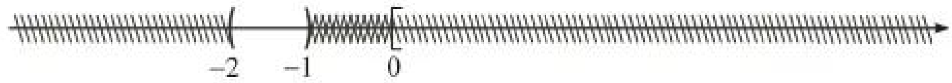
$$S_2 = (-2\ ;\ -\sqrt{2}\,] \cup (-1\ ;\ 0) \cup [\,\sqrt{2}\ ;\ +\infty).$$

Tổng hợp kết quả, ta có tập nghiệm của hệ bất phương trình là $(2\ ;\ +\infty)$ (h.2).




*Hình 2*

b) $-2 < x < -1$ (h.3).




*Hình 3*

**17.** a) $x = -\dfrac{4}{9}$.

b) Xét hai trường hợp :

• Nếu $-3 < x < -2$ thì $x^2 + 5x + 6 < 0$, phương trình đã cho tương đương với $-(x^2 + 5x + 6) = 3x + 13$. Phương trình này vô nghiệm.

• Nếu $x \leq -3$ hoặc $x \geq -2$ thì $x^2 + 5x + 6 \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 5x + 6 = 3x + 13$, tức là $x^2 + 2x - 7 = 0$, suy ra $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$.

*Kết luận*. Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$.

c) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. *Hướng dẫn*. Đặt $y = x^2 + 3x$, ta có phương trình

$$y^2 + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -5 \text{ hoặc } y = 1.$$

Do đó, phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 3x = -5 \text{ hoặc } x^2 + 3x = 1.$$

**18.** a) Giải bất phương trình đã cho dẫn đến việc giải hai hệ bất phương trình sau :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 5x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 - (5x + 2) > 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(II)} \begin{cases} 5x + 2 < 0 \\ 3x^2 + (5x + 2) > 0. \end{cases}$$

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{5} \\ x < -\dfrac{1}{3} \text{ hoặc } x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{5} \leq x < -\frac{1}{3} \text{ hoặc } x > 2 \,;$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{2}{5} \\ x < -1 \text{ hoặc } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \text{ hoặc } -\frac{2}{3} < x < -\frac{2}{5}.$$

Tổng hợp kết quả, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = (-\infty\,; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}\,; -\frac{1}{3}\right) \cup (2\,; +\infty).$$

b) Bất phương trình đã cho dẫn đến hai hệ bất phương trình sau :

$$\text{(I)} \begin{cases} x + 1 < 0 \\ 2x^2 + 7x + 5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(II)} \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 7x + 5 > (x + 1)^2. \end{cases}$$

Giải từng hệ, ta được

$$\text{(I)} \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2}\,; \qquad \text{(II)} \Leftrightarrow x > -1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty\,; -\dfrac{5}{2}\right] \cup (-1\,; +\infty)$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 \leq (x + 3)^2 \end{cases}, \text{ tức là } \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -5 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ x \geq -7. \end{cases}$$

Do đó $x \geq 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [1\,; +\infty)$.

**19.** a) Số trung bình $\overline{x} \approx 66,66$.

b) Số trung vị $M_e = 65,5$.

c) Bảng phân bố tần số ghép lớp :

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [40 ; 50) | 4 |
| [50 ; 60) | 6 |
| [60 ; 70) | 10 |
| [70 ; 80) | 6 |
| [80 ; 90) | 4 |
| [90 ; 100) | 2 |
| | $N = 32$ |

(*Chú ý*. Nếu ta tính số trung bình theo bảng phân bố tần số ghép lớp thì phải bổ sung cột *giá trị đại diện*. Khi đó $\overline{x} \approx 66,88$).

**20.** a) Dấu hiệu : Số tiền mua hàng. Đơn vị điều tra : Một khách mua hàng trong siêu thị.

| Lớp | Giá trị đại diện | Tần số |
|---|---|---|
| [0 ; 99] | 49,5 | 20 |
| [100 ; 199] | 149,5 | 80 |
| [200 ; 299] | 249,5 | 70 |
| [300 ; 399] | 349,5 | 30 |
| [400 ; 499] | 449,5 | 10 |
| | | $N = 210$ |

b) Ta có $\overline{x} \approx 216,17$ nghìn đồng ; $s^2 \approx 9841,27$ ; $s \approx 99,20$ nghìn đồng.

**21.** a) Dấu hiệu : Tuổi của một cán bộ. Đơn vị điều tra : Một cán bộ.

b) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp :

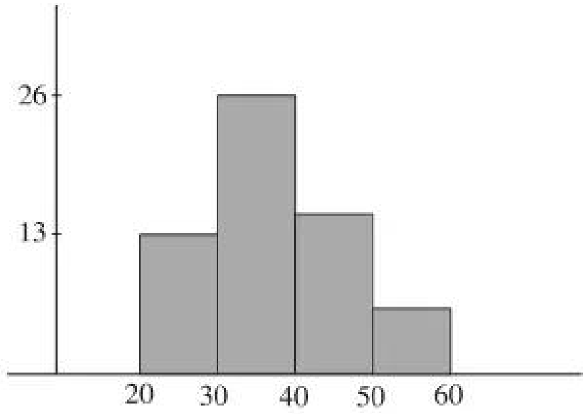
| Lớp | Giá trị đại diện | Tần số | Tần suất (%) |
|---|---|---|---|
| [20 ; 30) | 25 | 13 | 21,67 |
| [30 ; 40) | 35 | 26 | 43,33 |
| [40 ; 50) | 45 | 15 | 25 |
| [50 ; 60) | 55 | 6 | 10 |
| | | $N = 60$ | |

c) Số trung bình : $\overline{x} \approx 37,33$.

d) Phương sai $s^2 \approx 81{,}22$ ; Độ lệch chuẩn là $s \approx 9{,}01$.

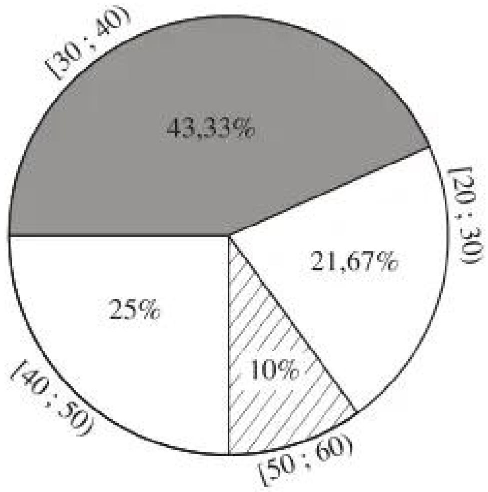
e) Biểu đồ tần số hình cột (h.4)

f) Trước hết, ta tính các góc ở tâm tương ứng với tần suất của các lớp (xem bảng sau). Từ đó vẽ được biểu đồ tần suất hình quạt (h.5).




*Hình 4*

| Lớp | Góc ở tâm |
|---|---|
| [20 ; 30) | $78^o$ |
| [30 ; 40) | $156^o$ |
| [40 ; 50) | $90^o$ |
| [50 ; 60) | $36^o$ |




*Hình 5*

**22.** a) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ;

$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Từ đó $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$ ;

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = -\dfrac{6+\sqrt{35}}{12}$ ;

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$ ;

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \dfrac{-6+\sqrt{35}}{12}$.

b) Do $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$ nên $\pi < 2\alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, suy ra $\cos 2\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha < 0$.

Vậy $\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\frac{3}{5}$ ;

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$, suy ra $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ;

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, suy ra $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;

$\tan\alpha = -2$ ; $\cot\alpha = -\frac{1}{2}$.

**23.** a) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-a\right)$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{8}\cos a + \sin a\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{8}\cos a - \sin a\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$= 4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin a\cos a = \sin\frac{\pi}{4}\sin 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a.$$

*Cách khác.* $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-a\right) =$

$$= \left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}-a\right)\right].\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}-a\right)\right]$$

$$= \left(2\sin\frac{\pi}{8}\cos a\right).\left(2\cos\frac{\pi}{8}\sin a\right) = \sin\frac{\pi}{4}\sin 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a.$$

b) Chú ý rằng $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$ và $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$, ta có

$$\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$= \cos^2\alpha + \left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha + \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

$$= \cos^2\alpha + 2\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) = \frac{3}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{3}{2}.$$

c) Ta có $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}-\tan\alpha}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}\tan\alpha\frac{\sqrt{3}+\tan\alpha}{1-\sqrt{3}\tan\alpha}$

$$= \frac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\tan\alpha,$$

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\tan\alpha} = \frac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\tan\alpha.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

*Áp dụng.* $\tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 110^\circ = \tan(60^\circ - 50^\circ)\tan 50^\circ \tan(60^\circ + 50^\circ)$

$$= \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**24.** a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta = (1-\cos^2\alpha) - (1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.$

*Cách khác.* $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$

$$= \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

b) Ta có

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Tương tự $\quad \tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

Do đó $\quad \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$

**25.** Nếu có $C$ và $\beta$ để $\sin\alpha + \cos\alpha = C\sin(\alpha+\beta)$ với mọi $\alpha$ thì khi $\alpha = 0$, ta được $1 = C\sin\beta$, khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ta được $1 = C\cos\beta$. Từ đó $C \neq 0$, $\sin\beta = \cos\beta = \frac{1}{C}$.

Vậy hoặc $\beta = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $C = \sqrt{2}$, hoặc $\beta = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $C = -\sqrt{2}$.

Dễ thử lại rằng với cả hai trường hợp đó thì $\sin\alpha + \cos\alpha = C\sin(\alpha+\beta)$ với mọi $\alpha$.

*Chú ý.* Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, ta có thể viết :

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

và $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$$= 2\cos\frac{3\pi}{4}\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right).$$