## LUYỆN TẬP (1 tiết)

**25.** a) – Khi $m = 0$, phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1}{m-2} = -\dfrac{1}{2}$.

– Khi $m = 2$, phương trình có một nghiệm $x = -\dfrac{3}{m} = -\dfrac{3}{2}$.

– Khi $m \neq 0$ và $m \neq 2$, phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{1}{m-2}$ và $x = -\dfrac{3}{m}$.

*Gợi ý.* $|mx - x + 1| = |x + 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx - x + 1 = x + 2 \\ mx - x + 1 = -x - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-2)x = 1 \\ mx = -3. \end{array}\right.$

b) – Với $a = 0$, phương trình có nghiệm $x = a + 1 = 1$ ;

– Với $a = 1$, phương trình có nghiệm $x = 2(a + 1) = 4$ ;

– Với $a \neq 0$ và $a \neq 1$, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 2(a + 1)$ và $x_2 = a + 1$.

*Gợi ý*. Với điều kiện $x \neq 2$ và $x \neq 2a$, ta có

$$\frac{a}{x-2} + \frac{1}{x-2a} = 1 \Leftrightarrow a(x-2a) + x - 2 = (x-2)(x-2a)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3(a+1)x + 2(a+1)^2 = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) luôn có hai nghiệm $x_1 = 2(a + 1)$ và $x_2 = a + 1$. Xét các điều kiện :

$x_1 \neq 2 \Leftrightarrow 2a + 2 \neq 2 \Leftrightarrow a \neq 0$ ; $x_2 \neq 2 \Leftrightarrow a + 1 \neq 2 \Leftrightarrow a \neq 1$.

$x_1 \neq 2a \Leftrightarrow 2a + 2 \neq 2a$ (với mọi $a$) ; $x_2 \neq 2a \Leftrightarrow a + 1 \neq 2a \Leftrightarrow a \neq 1$.

c) – Với $m \neq 1$ và $m \neq -\frac{3}{2}$, phương trình có nghiệm $x = \frac{m+4}{m-1}$.

– Với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$, phương trình vô nghiệm.

*Gợi ý*. Điều kiện $x \neq -1$. Khi đó :

$$\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow (m-1)x = m + 4. \qquad (1)$$

Với $m = 1$, dễ thấy (1) vô nghiệm.

Với $m \neq 1$, (1) $\Leftrightarrow x = \frac{m+4}{m-1}$. Xét điều kiện $x \neq -1$, ta có :

$\frac{m+4}{m-1} = -1 \Leftrightarrow m + 4 = -m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$. Do đó, nếu $m = -\frac{3}{2}$ thì giá trị $x = \frac{m+4}{m-1}$ bị loại và phương trình vô nghiệm.

d) – Với $k = -3$ hoặc $k = -9$, phương trình có nghiệm $x = 0$ ;

– Với $k \neq -3$ và $k \neq -9$, phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -(k + 6)$.

*Gợi ý*. Với điều kiện $x \neq \pm 3$, ta có phương trình tương đương $x^2 + (k + 6)x = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -(k + 6)$. Tuy nhiên, điều kiện trên sẽ loại bỏ nghiệm thứ hai khi $k \in \{-3 ; -9\}$.

**26.** a) $(2x+m-4)(2mx-x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+m-4=0 & (1) \\ 2mx-x+m=0. & (2) \end{array}\right.$

Ta giải lần lượt :

$(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}(4-m)$ (với mọi $m$).

$(2) \Leftrightarrow (2m-1)x=-m.$

Phương trình (2) vô nghiệm khi $m=\dfrac{1}{2}$, có nghiệm $x=\dfrac{m}{1-2m}$ khi $m\neq\dfrac{1}{2}\cdot$

Từ đó, ta có kết luận :

- Với $m=\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}(4-m)=\dfrac{7}{4}\cdot$
- Với $m\neq\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{1}{2}(4-m)$ và $x=\dfrac{m}{1-2m}\cdot$

b) Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{m+1}$ và $x=\dfrac{1}{m+3}$ nếu $m\neq -1$ và $m\neq -3$, có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ nếu $m=-1$, có nghiệm $x=-\dfrac{1}{2}$ nếu $m=-3$.

c) $S=\left\{1\,;-\dfrac{1}{m}\right\}$ nếu $-1<m<0$ ; $S=\{1\}$ nếu $m\leq -1$ hoặc $m\geq 0$.

d) Với điều kiện $x\neq 2$, ta có :

$$\frac{2a-1}{x-2}=a-2 \Leftrightarrow (a-2)(x-2)=2a-1$$

$$\Leftrightarrow (a-2)x=4a-5. \qquad (1)$$

Khi $a=2$, (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Khi $a\neq 2$, (1) có một nghiệm $x=\dfrac{4a-5}{a-2}\cdot$ Do điều kiện $x\neq 2$, nghiệm này sẽ bị loại nếu :

$$\frac{4a-5}{a-2}=2 \Leftrightarrow 4a-5=2(a-2) \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\cdot$$

*Kết luận.* – Khi $a=2$ hoặc $a=\dfrac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

– Khi $a\neq 2$ và $a\neq\dfrac{1}{2}$, phương trình có nghiệm $x=\dfrac{4a-5}{a-2}\cdot$

e) Với điều kiện $x \neq -3$, ta có

$$\frac{(m+1)x+m-2}{x+3} = m \Leftrightarrow (m+1)x+m-2 = m(x+3) \Leftrightarrow x = 2m+2.$$

Do điều kiện $x \neq -3$, nghiệm này sẽ bị loại nếu

$$2m+2 = -3 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}.$$

*Kết luận*. Phương trình có nghiệm $x = 2m+2$ nếu $m \neq -\frac{5}{2}$, vô nghiệm nếu $m = -\frac{5}{2}$.

f) Hiển nhiên nếu $a < 0$ thì phương trình vô nghiệm nên ta chỉ giải phương trình với giả thiết $a \geq 0$. Điều kiện của phương trình là $x \neq 1$. Với điều kiện đó,

$$\left|\frac{ax+1}{x-1}\right| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} ax+1 = a(x-1) & (1) \\ ax+1 = -a(x-1). & (2) \end{array}\right.$$

*Giải* (1). Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $1 = -a$.

Phương trình này vô nghiệm do giả thiết $a \geq 0$.

*Giải* (2). Ta có (2) $\Leftrightarrow$ $2ax = a - 1$.

Phương trình này vô nghiệm khi $a = 0$, có nghiệm $x = \frac{a-1}{2a}$ khi $a \neq 0$ (tức là $a > 0$). Dễ thấy điều kiện $x \neq 1$ được thoả mãn do $a > 0$.

*Kết luận :*

Với $a \leq 0$, phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $a > 0$, phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{a-1}{2a}$.

**27.** a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$.

*Gợi ý*. Đặt $y = \sqrt{4x^2 - 12x + 11}$, ta có phương trình $y^2 - 5y + 4 = 0$.

b) $x \in \{-5 ; -2 ; 1\}$. *Gợi ý*. Đặt $y = |x+2|$, ta có phương trình $y^2 - 3y = 0$.

c) $x \in \left\{-1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right\}$. *Gợi ý*. Viết lại phương trình thành

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 2 = 0 \text{ rồi đặt } y = \left|2x - \frac{1}{x}\right|.$$

**28.** $m \in \left\{-1\,;-\dfrac{1}{2}\,;1\right\}$.

*Gợi ý*. Ta có $|mx-2|=|x+4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}(m-1)x=6 & (1)\\ (m+1)x=-2. & (2)\end{array}\right.$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất trong và chỉ trong các trường hợp :

- (1) có nghiệm duy nhất, (2) vô nghiệm. Trường hợp này dẫn đến $m=-1$.
- (1) vô nghiệm, (2) có nghiệm duy nhất. Trường hợp này dẫn đến $m=1$.
- (1) và (2) đều có nghiệm (duy nhất) và hai nghiệm đó trùng nhau. Lúc này, $m \neq \pm 1$, nghiệm của (1) là $x=\dfrac{6}{m-1}$, nghiệm của (2) là $x=-\dfrac{2}{m+1}$.

$$\frac{6}{m-1}=-\frac{2}{m+1} \Leftrightarrow 6(m+1)=-2(m-1) \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

*Chú ý*. Có thể giải bằng cách bình phương hai vế dẫn đến phương trình

$$(m^2-1)x^2-4(m+2)x-12=0.$$

**29.** Với điều kiện $x \neq a-1$ và $x \neq -a-2$, ta có

$$\frac{x+1}{x-a+1}=\frac{x}{x+a+2} \Leftrightarrow (x+1)(x+a+2)=x(x-a+1)$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+(a+3)x+a+2=x^2-(a-1)x \ \Leftrightarrow\ 2(a+1)x=-(a+2). \qquad (2)$$

Nếu $a=-1$ thì (2) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $a \neq -1$ thì (2) có một nghiệm $x=-\dfrac{a+2}{2(a+1)}$. Ta cần xét xem khi nào thì giá trị này bị loại do không thoả mãn các điều kiện xác định. Ta có (nhớ rằng ta đang xét trường hợp $a \neq -1$) :

- $-\dfrac{a+2}{2(a+1)}=a-1 \Leftrightarrow -(a+2)=2(a+1)(a-1)$

$$\Leftrightarrow 2a^2+a=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } a=-\frac{1}{2}.$$

- $-\dfrac{a+2}{2(a+1)}=-a-2 \Leftrightarrow -(a+2)=-2(a+2)(a+1) \Leftrightarrow (a+2)(2a+1)=0$

$$\Leftrightarrow a=-2 \text{ hoặc } a=-\frac{1}{2}.$$

*Kết luận*. Phương trình vô nghiệm nếu $a \in \left\{-2\,;-1\,;-\dfrac{1}{2}\,;0\right\}$.