LUYỆN TẬP (1 tiết)

• *Mục tiêu của bài*

– Chứng minh được một số bất đẳng thức đơn giản.

– Tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một số hàm số hoặc biểu thức.

• *Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập*

14. $\dfrac{a^4}{b}+\dfrac{b^4}{c}+\dfrac{c^4}{a}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{b}\cdot\dfrac{b^4}{c}\cdot\dfrac{c^4}{a}}=3abc.$

15. Gọi a và b theo thứ tự là độ dài cánh tay đòn bên phải và bên trái của cái cân đĩa ($a>0$, $b>0$, đơn vị : cm). Trong lần cân đầu, khối lượng cam được cân là $\dfrac{a}{b}$ (kg). Trong lần cân sau, khối lượng cam được cân là $\dfrac{b}{a}$(kg). Do đó, khối lượng cam được cân cả hai lần là $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)$(kg). Nếu cái cân đĩa đó không chính xác, tức là $a\neq b$, thì vì $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2$ nên khách hàng mua được nhiều hơn 2 kg cam.

16. a) Ta có $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ với mọi $k\geq 1$. Do đó

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1.$$

b) Ta có $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$ với mọi $k\geq 2$. Do đó,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2.$$

17. Với $1\leq x\leq 4$, ta có

$$A^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}\right)^2=3+2\sqrt{(x-1)(4-x)}\leq 3+x-1+4-x=6,$$

suy ra $A\leq\sqrt{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x-1=4-x$, tức là $x=\dfrac{5}{2}$ (thoả mãn điều kiện $1\leq x\leq 4$).

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\sqrt{6}$.

$A^2 = 3 + 2\sqrt{(x-1)(4-x)} \geq 3$ vì $\sqrt{(x-1)(4-x)} \geq 0$. Vậy $A \geq \sqrt{3}$.

$A^2 = 3$ khi $x = 1$ hoặc $x = 4$, nên $A = \sqrt{3}$ khi $x = 1$ hoặc $x = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{3}$.

18. $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$

19. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $c + d \geq 2\sqrt{cd} \Rightarrow a + b + c + d \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2 = ab + cd + 2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geq \sqrt{abcd} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.$$

20. a) Vì $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq 2(x^2 + y^2) = 2$ nên $|x + y| \leq \sqrt{2}$.

b) Vì $4x - 3y = 15$ nên $y = \frac{4}{3}x - 5$. Do đó,

$$x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{4}{3}x - 5\right)^2 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25$$

$$= \frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25 = \left(\frac{5}{3}x - 4\right)^2 + 9 \geq 9.$$