LUYỆN TẬP (1 tiết)

• *Mục tiêu của bài*. Giúp học sinh vận dụng được định lí về dấu của nhị thức bậc nhất để giải và biện luận các bất phương trình quy về bậc nhất.

• *Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập*

36. a) $mx + 4 > 2x + m^2 \Leftrightarrow (m-2)x > m^2 - 4$.

– Nếu $m = 2$, bất phương trình trở thành $0x > 0$, tập nghiệm là $S = \varnothing$.

– Nếu $m > 2$, bất phương trình tương đương với $x > m + 2$, tập nghiệm là $S = (m + 2\,;\, +\infty)$.

– Nếu $m < 2$, bất phương trình tương đương với $x < m + 2$, tập nghiệm là $S = (-\infty\,;\, m + 2)$.

b) Nếu $m = \dfrac{1}{2}$ thì $S = \mathbb{R}$. Nếu $m > \dfrac{1}{2}$ thì $S = [2m + 1\,;\, +\infty)$. Nếu $m < \dfrac{1}{2}$ thì $S = (-\infty\,;\, 2m + 1]$.

c) Nếu $m = \pm 1$ thì $S = \varnothing$. Nếu $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì $S = (-\infty\,;\, m^2 + 1)$. Nếu $-1 < m < 1$ thì $S = (m^2 + 1\,;\, +\infty)$.

d) $2(m+1)x \le (m+1)^2(x-1) \Leftrightarrow (m+1)(m-1)x \ge (m+1)^2$.

– Nếu $m = -1$, bất phương trình trở thành $0x \ge 0$, tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

– Nếu $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì $(m+1)(m-1) > 0$ nên bất phương trình tương đương với $x \ge \dfrac{m+1}{m-1}$, tập nghiệm là $S = \left[\dfrac{m+1}{m-1}\,;\, +\infty\right)$.

– Nếu $-1 < m < 1$ thì $(m+1)(m-1) < 0$ nên bất phương trình tương đương với $x \le \dfrac{m+1}{m-1}$, tập nghiệm là $S = \left(-\infty\,;\, \dfrac{m+1}{m-1}\right]$.

– Nếu $m = 1$, bất phương trình trở thành $0x \ge 4$, tập nghiệm là $S = \varnothing$.

37. a) $S = (-\infty\,;\, -1) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,;\, \dfrac{5}{4}\right)$;

b) $S = \left(\dfrac{1}{3}\,;\, 1\dfrac{1}{2}\right) \cup (4\,;\, +\infty)$.

c) $\dfrac{-3x+1}{2x+1} \le -2 \Leftrightarrow \dfrac{-3x+1+2(2x+1)}{2x+1} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{2x+1} \le 0$.

Bằng cách lập bảng xét dấu, ta suy ra tập nghiệm là $S = \left[-3\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

d) $\dfrac{x+2}{3x+1} \le \dfrac{x-2}{2x-1} \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(2x-1)-(x-2)(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+8x}{(3x+1)(2x-1)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-8)}{(3x+1)(2x-1)} \ge 0.$

Lập bảng xét dấu vế trái :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		8		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-8$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x(x-8)}{(3x+1)(2x-1)}$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm là

$$S = \left(-\infty\,;-\frac{1}{3}\right) \cup \left[0\,;\frac{1}{2}\right) \cup [8\,;+\infty).$$

38. a) $(2x-\sqrt{2})(x-m) > 0 \Leftrightarrow 2\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-m) > 0.$

– Nếu $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì ta có bảng sau :

x	$-\infty$		m		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$x-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-m$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm là $S = (-\infty ; m) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right)$.

– Nếu $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì rõ ràng tập nghiệm $S = \left(-\infty ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right)$.

– Nếu $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì có bảng sau :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		m		$+\infty$
$x - \frac{\sqrt{2}}{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - m$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x - m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm là $S = \left(-\infty ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (m ; +\infty)$.

b) $\frac{\sqrt{3} - x}{x - 2m + 1} \leq 0$. Xét các trường hợp :

– Nếu $2m - 1 < \sqrt{3}$ (tức là $m < \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$) thì ta có bảng sau :

x	$-\infty$		$2m - 1$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\sqrt{3} - x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x - 2m + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{\sqrt{3} - x}{x - 2m + 1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm là $S = (-\infty ; 2m - 1) \cup [\sqrt{3} ; +\infty)$.

– Nếu $2m - 1 = \sqrt{3}$ (tức là $m = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$) thì dễ thấy tập nghiệm là

$$S = (-\infty ; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3} ; +\infty).$$

– Nếu $2m-1>\sqrt{3}$ (tức là $m>\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$) thì ta có bảng sau :

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		$2m-1$		$+\infty$
$\sqrt{3}-x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2m+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{\sqrt{3}-x}{x-2m+1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Vậy tập nghiệm là $S=(-\infty\,;\,\sqrt{3}\,]\cup(2m-1\,;\,+\infty)$.

39. a) $S=\{4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\}$; b) $S=\{1\}$.

40. a) $|x+1|+|x-1|=4$.

– Nếu $x\le -1$ thì $x+1\le 0$ và $x-1\le 0$ nên phương trình đã cho trở thành

$$-x-1-x+1=4,\ \text{tức là } x=-2 \text{ (thoả mãn } x\le -1).$$

– Nếu $-1<x\le 1$ thì $x+1>0$, $x-1\le 0$ nên phương trình đã cho trở thành $x+1-x+1=4$, vô nghiệm.

– Nếu $x>1$ thì $x+1>0$, và $x-1>0$ nên phương trình đã cho trở thành

$$x+1+x-1=4,\ \text{tức là } x=2 \text{ (thoả mãn } x>1).$$

Vậy $S=\{-2\,;\,2\}$.

b) $\dfrac{|2x-1|}{(x+1)(x-2)}>\dfrac{1}{2}$.

– Nếu $x\le\dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình đã cho trở thành $\dfrac{-2x+1}{(x+1)(x-2)}>\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\dfrac{-2x+1}{(x+1)(x-2)}>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2(-2x+1)-(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x-2)}>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{-x^2-3x+4}{2(x+1)(x-2)}>0\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)(x+4)}{2(x+1)(x-2)}<0.$

Lập bảng xét dấu vế trái trên nửa khoảng $\left(-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$:

x	$-\infty$		-4		-1		$\frac{1}{2}$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+1)(x-2)}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Bảng trên chứng tỏ rằng tập nghiệm của bất phương trình là khoảng $(-4\ ;-1)$.

– Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì bất phương trình đã cho trở thành $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)} > \dfrac{1}{2}$.

Ta có $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2(2x-1)-(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x-2)} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-5)}{2(x+1)(x-2)} < 0.$$

Lập bảng xét dấu vế trái trên khoảng $\left(\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right)$:

x	$\frac{1}{2}$		2		5		$+\infty$
x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{x(x-5)}{(x+1)(x-2)}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Bảng trên chứng tỏ rằng tập nghiệm của bất phương trình là khoảng $(2\ ;\ 5)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-4\ ;-1) \cup (2\ ;\ 5)$.

41. a) $\begin{cases}(x-\sqrt{5})(\sqrt{7}-2x) > 0\\ x-m \leq 0.\end{cases}$

Để giải bất phương trình thứ nhất, ta lập bảng :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{7}}{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x-\sqrt{5}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\sqrt{7}-2x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(x-\sqrt{5})(\sqrt{7}-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $(x-\sqrt{5})(\sqrt{7}-2x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{2} < x < \sqrt{5}$. Ta có $S_1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} ; \sqrt{5}\right)$.

Bất phương trình thứ hai có nghiệm $x \leq m$. Ta có $S_2 = (-\infty ; m]$. Do đó :

– Nếu $m \leq \frac{\sqrt{7}}{2}$ thì tập nghiệm là $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$;

– Nếu $\frac{\sqrt{7}}{2} < m < \sqrt{5}$ thì tập nghiệm là $S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} ; m\right]$;

– Nếu $m \geq \sqrt{5}$ thì tập nghiệm là $S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} ; \sqrt{5}\right)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} < \dfrac{5}{2x-1} \\ x - m \geq 0. \end{cases}$

Ta có $\frac{2}{x-1} < \frac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{2(2x-1)-5(x-1)}{(x-1)(2x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-1)(2x-1)} > 0$.

Bằng cách lập bảng xét dấu vế trái, ta suy ra

$$\frac{2}{x-1} < \frac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \text{ hoặc } x > 3.$$

Ta có $S_1 = \left(\frac{1}{2} ; 1\right) \cup (3 ; +\infty)$.

Tập nghiệm của bất phương trình thứ hai là $S_2 = [m ; +\infty)$.

Do đó :

– Nếu $m \leq \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm là $S = \left(\frac{1}{2} ; 1\right) \cup (3 ; +\infty)$;

– Nếu $\frac{1}{2} < m < 1$ thì tập nghiệm là $S = [m ; 1) \cup (3 ; +\infty)$;

– Nếu $1 \leq m \leq 3$ thì tập nghiệm là $S = (3 ; +\infty)$;

– Nếu $m > 3$ thì tập nghiệm là $S = [m ; +\infty)$.