LUYỆN TẬP (2 tiết)

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

31. Bằng biểu đồ Ven, dễ thấy

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)\ ;\ B = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Từ đó, ta suy ra

$$A = \{1\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\}\ ; \qquad B = \{2\ ;\ 10\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\}.$$

32. $A \cap B = \{2 ; 4 ; 6 ; 9\}$; $B \setminus C = \{0 ; 2 ; 8 ; 9\}$.

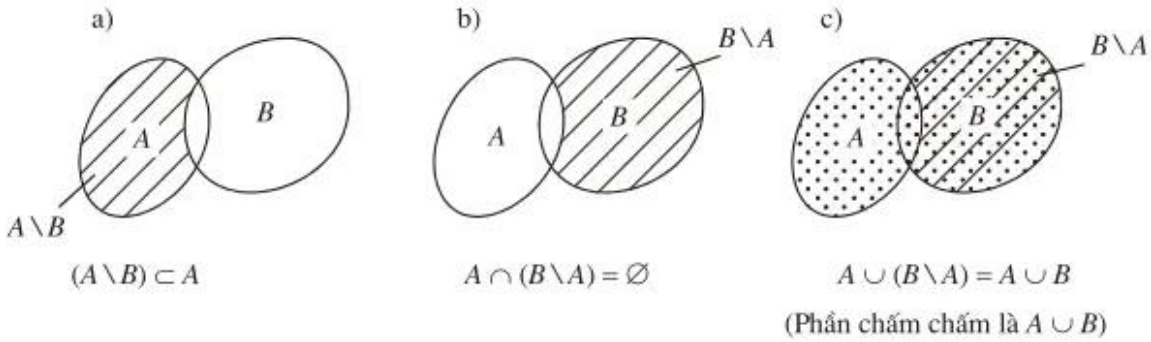
Ta có $A \cap (B \setminus C) = \{2 ; 9\}$. Tương tự, ta có $(A \cap B) \setminus C = \{2 ; 9\}$. Vậy $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

Chú ý. Ta có thể chứng minh đẳng thức $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ đúng cho ba tập A, B, C bất kì như sau :

Giả sử $x \in A \cap (B \setminus C)$. Khi đó $x \in A, x \in (B \setminus C)$. Vậy $x \in A, x \in B, x \notin C$, tức là $x \in A \cap B, x \notin C$. Vậy $x \in (A \cap B) \setminus C$.

Ngược lại, giả sử $x \in (A \cap B) \setminus C$, tức là $x \in (A \cap B), x \notin C$ hay $x \in A$, $x \in B, x \notin C$ hay $x \in A, x \in (B \setminus C)$. Vậy $x \in A \cap (B \setminus C)$.

33. Xem hình 1.1.



Hình 1.1

34. a) A ; b) $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 8 ; 10\}$.

35. a) Sai ; b) Đúng.

36. a) Các tập con có ba phần tử của A là $\{a ; b ; c\}$, $\{a ; b ; d\}$, $\{b ; c ; d\}$, $\{a ; c ; d\}$.

b) Các tập con có hai phần tử của A là $\{a ; b\}$, $\{a ; c\}$, $\{a ; d\}$, $\{b ; c\}$, $\{b ; d\}$, $\{c ; d\}$.

c) Các tập con có không quá một phần tử của A là $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \varnothing$.

37. Điều kiện để $A \cap B = \varnothing$ là $a + 2 < b$ hoặc $b + 1 < a$, tức là $a < b - 2$ hoặc $a > b + 1$. Từ đó suy ra điều kiện để $A \cap B \neq \varnothing$ là $b - 2 \leq a \leq b + 1$.

38. (D) là khẳng định sai. Bởi vì $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

39. $A \cup B = (-1 ; 1)$;

$A \cap B = \{0\}$;

$\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ hoặc } x > 0\} = (-\infty ; -1] \cup (0 ; +\infty)$.

40. Chứng minh $A = B$. Giả sử $n \in A$, suy ra $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Rõ ràng n có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ nên $n \in B$.

Ngược lại, giả sử $n \in B$, suy ra $n = 10h + r$, trong đó $r \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$. Vậy $r = 2t$ với $t \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Khi đó $n = 10h + 2t = 2(5h + t) = 2k$ với $k = 5h + t \in \mathbb{Z}$, do đó $n \in A$.

Ta chứng minh $A = C$. Giả sử $n \in A$, suy ra $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Đặt $k' = k + 1 \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, $n = 2(k' - 1) = 2k' - 2$, vậy $n \in C$.

Ngược lại, giả sử $n \in C$, suy ra $n = 2k - 2 = 2(k - 1)$. Đặt $k' = k - 1 \in \mathbb{Z}$. Khi đó, $n = 2k'$, $k' \in \mathbb{Z}$, vậy $n \in$ A.

Ta chứng minh $A \neq D$. Ta có $2 \in A$, nhưng $2 \notin D$ vì nếu $2 \in D$ thì ta phải có $2 = 3k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$, nhưng $k = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, vậy $2 \notin D$.

41. $A \cup B = (0 ; 4)$, suy ra $\mathsf{C}_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty)$.

$A \cap B = [1 ; 2]$, suy ra $\mathsf{C}_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-\infty ; 1) \cup (2 ; +\infty)$.

42. Ta có $A \cup (B \cap C) = \{a, b, c\}$;

$(A \cup B) \cap C = \{b, c\}$;

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, c, e\} = \{a, b, c\}$;

$(A \cap B) \cup C = \{b, c, e\}$.

Vậy khẳng định đúng là (B).

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

1. Số phần tử của một tập hợp

Ta thường gặp bài toán xác định một tập hợp đã cho có bao nhiêu phần tử. Nếu tập A có đúng n phần tử thì A là tập hữu hạn và n gọi là bản số hay kích thước của A. Một tập được gọi là vô hạn nếu nó không phải là hữu hạn. Chúng ta sẽ học các phương pháp xác định số phần tử của một tập hợp một cách hệ thống trong chương trình lớp 11. Sau đây là hai bài toán đơn giản về đếm số phần tử trong tập hợp.

Bài 1. Cho A là tập hợp các số chẵn có hai chữ số. Hỏi A có bao nhiêu phần tử ?

Giải. Mỗi số tự nhiên chẵn có dạng $2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Theo giả thiết ta có $10 \leq 2k < 100$, suy ra $A = \{2k \mid 5 \leq k < 50\}$. Vậy A có 45 phần tử.

Bài 2. Cho A là tập hợp các số nguyên dương bé hơn 500 và là bội của 3. Hỏi A có bao nhiêu phần tử ?

Giải. Mỗi số nguyên dương là bội của 3 có dạng $3k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta phải có $0 < 3k < 500$, suy ra $A = \{3k \mid 0 < k < 167, k \in \mathbb{N}\}$. Vậy A có 166 phần tử.

2. Tích Đề-các

Nhiều vấn đề quan trọng của toán học dựa trên khái niệm tích Đề-các. Cho hai tập hợp A và B. Tích Đề-các của A và B, kí hiệu là $A \times B$, là tập hợp tất cả các cặp $(a ; b)$ với $a \in A$, $b \in B$, nghĩa là

$$A \times B = \{(a ; b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ví dụ 1

Cho $A = \{1 ; 2\}$, $B = \{a ; b ; c\}$. Khi đó

$$A \times B = \{(1 ; a) ; (1 ; b) ; (1 ; c) ; (2 ; a) ; (2 ; b) ; (2 ; c)\}.$$

3. Số phần tử của hợp hai tập hợp

Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của một tập hợp hữu hạn A. Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn không giao nhau thì rõ ràng ta có

$$|A| + |B| = |A \cup B|.$$

Xét trường hợp A và B là hai tập bất kì.

Chú ý rằng B và $A \setminus B$ là hai tập không giao nhau và $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$ nên ta có

$$|A \cup B| = |B| + |A \setminus B|. \quad (1)$$

Mặt khác, $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ và hai tập $(A \cap B)$ và $(A \setminus B)$ không giao nhau nên ta có

$$|A \setminus B| + |A \cap B| = |A|. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$

Ví dụ 2

Một lớp học có 25 học sinh học khá các môn tự nhiên, 24 học sinh học khá các môn xã hội, 10 học sinh học khá cả các môn tự nhiên và xã hội, 3 học sinh không học khá cả các môn tự nhiên và xã hội. Hỏi :

a) Lớp học đó có bao nhiêu học sinh học khá các môn tự nhiên nhưng không học khá các môn xã hội ?

b) Lớp học đó có bao nhiêu học sinh học khá các môn xã hội nhưng không học khá các môn tự nhiên ?

c) Lớp học đó có bao nhiêu học sinh ?

Hướng dẫn. Gọi A là tập hợp các học sinh học khá các môn tự nhiên, B là tập hợp các học sinh học khá các môn xã hội. Ta có

$$|A| = 25, |B| = 24, |A \cap B| = 10.$$

a) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 25 - 10 = 15$;

b) $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B| = 24 - 10 = 14$;

c) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 24 - 10 = 39.$

Số học sinh của lớp học đó là $39 + 3 = 42$.

4. Công thức Đờ Mooc-găng (De Morgan)

Nếu tất cả các tập chúng ta đang xét đều là những tập con của một tập E nào đó thì ta nói E là tập vũ trụ và $\complement_E A$ được kí hiệu là $\overline{A}$. Khi đó, ta có các công thức sau đây gọi là công thức Đờ Mooc-găng :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \ ;$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

5. Mối liên hệ giữa tập hợp và mệnh đề

Cho X là một tập hợp. Giả sử $P(x)$ là mệnh đề chứa biến xác định trên tập X. Gọi A là tập hợp tất cả các $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng. Kí hiệu $A = \{x \in X \mid P(x)\}$. Khi đó, A là tập con của X và được gọi là tập đúng cho $P(x)$. Ngược lại, nếu A là một tập con của X thì mệnh đề chứa biến $P(x)$: "x là phần tử của A" có tập đúng là A. Như vậy, ta có tương ứng một – một giữa một mệnh đề chứa biến với một tập con của X.

Ta dễ dàng kiểm tra nếu $A = \{x \in X | P(x)\}$, $B = \{x \in X | Q(x)\}$ thì

i) $\overline{A} = \{x \in X | \overline{P(x)}\}$;

$A \cup B = \{x \in X | P(x) \vee Q(x)\}$;

$A \cap B = \{x \in X | P(x) \wedge Q(x)\}$.

ii) Định lí "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" hay "$P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$" được phát biểu dưới ngôn ngữ tập hợp là "Tập A là tập con của tập B".

Định lí "$\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$" hay "$P(x)$ là điều kiện cần và đủ để có $Q(x)$" được phát biểu dưới ngôn ngữ tập hợp là "Tập A và tập B bằng nhau".

6. Luật phi mâu thuẫn. Luật bài trung

Giả sử P là một tính chất nào đó đã cho, A là tập hợp tất cả các phần tử x thuộc tập vũ trụ E mà có tính chất P. Khi đó, $\overline{A}$ là tập hợp tất cả các phần tử x thuộc tập vũ trụ E mà không có tính chất P. Mệnh đề "$A \cap \overline{A} = \varnothing$" có nghĩa là : "Mỗi đối tượng không thể đồng thời vừa có vừa không có tính chất P", khẳng định này được gọi là *luật phi mâu thuẫn*. Mệnh đề $A \cup \overline{A} = E$ có nghĩa là "Mỗi đối tượng hoặc có hoặc không có tính chất P", khẳng định này được gọi là *luật bài trung*.

7. Khái niệm số đại số và số siêu việt

Một số thực a gọi là *số đại số* nếu nó là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên. Một số không phải là số đại số gọi là *số siêu việt*. Rõ ràng mọi số hữu tỉ là số đại số vì số hữu tỉ $r = \frac{p}{q}$ là nghiệm của nhị thức bậc nhất $P(x) = qx - p$. Số vô tỉ $\sqrt{2}$ là số đại số vì nó là nghiệm của tam thức bậc hai $P(x) = x^2 - 2$. Người ta chứng minh được số π là số siêu việt. Vì π là số siêu việt nên ta không thể cầu phương hình tròn tức là không thể dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình tròn đã cho bằng thước và compa.

Như vậy, tập số hữu tỉ là tập con của tập số đại số và tập số siêu việt là tập con của tập số vô tỉ. Việc nhận biết một số vô tỉ nào đó là số đại số hay số siêu việt là một bài toán rất khó.