LUYỆN TẬP (2 tiết)

• *Mục tiêu của bài.* Rèn luyện thêm cho học sinh kĩ năng giải các phương trình và bất phương trình quy về bậc hai.

• *Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập*

69. a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2-2}{x+1} = 2 \text{ hoặc } \frac{x^2-2}{x+1} = -2.$$

Ta có

$$\frac{x^2-2}{x+1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - 2 = 2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}.$$

$$\frac{x^2-2}{x+1} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - 2 = -2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x = 0 \text{ hoặc } x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -2.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{5}$, $x = 0$ và $x = -2$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3x+4}{x-2} \geq -3 \\ \dfrac{3x+4}{x-2} \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+4}{x-2} + 3 \geq 0 \\ \dfrac{3x+4}{x-2} - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6x-2}{x-2} \geq 0 \\ \dfrac{10}{x-2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{3} \text{ hoặc } x > 2 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\infty ; \dfrac{1}{3}\right]$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x-3}{x-3} \leq -1 \quad \text{hoặc} \quad \frac{2x-3}{x-3} \geq 1.$$

Ta có :

$$\frac{2x-3}{x-3} \le -1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-3} + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{3x-6}{x-3} \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x < 3.$$

$$\frac{2x-3}{x-3} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-3} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow x \le 0 \text{ hoặc } x > 3.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$(-\infty ; 0] \cup [2 ; 3) \cup (3 ; +\infty).$$

d) Phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1}{5}$ và $x = 7$.

70. a) $\left[-\frac{1}{11} ; +\infty\right)$; b) $(-\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty)$.

71. a) $x = 2$.

b) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 3x + 12}$, $y \ge 0$. Thay vào phương trình đã cho, ta được $y = y^2 - 12$ hay $y^2 - y - 12 = 0$. Giải phương trình, ta được

$$y = -3 \text{ (loại) và } y = 4.$$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = 4$ hay $x^2 + 3x + 12 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -4$.

72. a) $\left[\frac{\sqrt{6}}{3} - 1 ; +\infty\right)$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x - 10} < 2x - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (2x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hoặc } x > 5 \\ x > 2 \\ 3x^2 - 13x + 26 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(5 ; +\infty)$.

c) $(-\infty ; 0] \cup [34 ; +\infty)$.

73. a) $(-\infty ; -3] \cup [13 ; +\infty)$; b) $(-\infty ; -2]$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

(I) $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ \sqrt{x+5} < 1 - x \end{cases}$ hoặc (II) $\begin{cases} 1 - x < 0 \\ \sqrt{x+5} > 1 - x. \end{cases}$

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x + 5 \geq 0 \\ x + 5 < (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -5 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x < 1 \\ x < -1 \text{ hoặc } x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x < -1.$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-5 ; -1) \cup (1 ; +\infty)$.

74. Đặt $y = x^2$, $y \geq 0$, ta được phương trình

$$y^2 + (1 - 2m)y + m^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

a) Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc phương trình (1) chỉ có nghiệm âm.

• Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = (1 - 2m)^2 - 4(m^2 - 1) = 5 - 4m < 0 \text{ hay } m > \frac{5}{4}.$$

• Phương trình (1) chỉ có nghiệm âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$$

Thay $\Delta = 5 - 4m$, $P = m^2 - 1$ và $S = 2m - 1$, ta được hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 5 - 4m \geq 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \text{ hay } m < -1.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{5}{4}.$$

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu hoặc có một nghiệm kép dương.

Ta xét hai trường hợp :

• Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$P = m^2 - 1 < 0 \text{ hay } -1 < m < 1.$$

• Nếu $\Delta = 0$ hay $m = \dfrac{5}{4}$ thì phương trình (1) có một nghiệm kép dương $x = \dfrac{3}{4}$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (-1\,;\,1) \cup \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

c) Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt, tức là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4m > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{5}{4}.$$

75. Đặt $y = x^2$, $y \geq 0$, ta được phương trình

$$(a-1)y^2 - ay + a^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0. Phương trình (1) có nghiệm $y = 0$ khi và chỉ khi

$$a^2 - 1 = 0 \text{ hay } a = \pm 1.$$

• Với $a = 1$, phương trình (1) trở thành $-y = 0$. Trong trường hợp này, (1) chỉ có một nghiệm là 0.

• Với $a = -1$, phương trình (1) trở thành $-2y^2 + y = 0$.

Giải phương trình này, ta được $y = 0$ và $y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a = -1$.