B. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

§1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (3 ; -6)$; $\overrightarrow{BC} = (-1 ; 4)$; $\overrightarrow{AC} = (2 ; -2)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì đường cao AH qua A và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

$$-1(x + 1) + 4(y - 2) = 0 \text{ hay } x - 4y + 9 = 0.$$

Đường cao BH qua B và nhận $\overrightarrow{AC}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

$$2(x - 2) - 2(y + 4) = 0 \text{ hay } x - y - 6 = 0.$$

Đường cao CH qua C và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

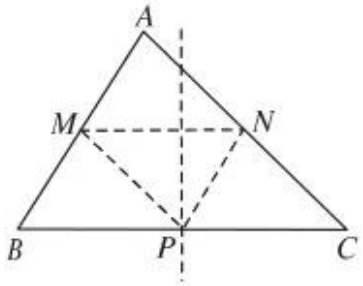
$$3(x - 1) - 6(y - 0) = 0 \text{ hay } x - 2y - 1 = 0.$$

2. (h. 92) Giả sử M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC của tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2 ; 8)$; $\overrightarrow{NP} = (8 ; -8)$; $\overrightarrow{MP} = (10 ; 0)$.

Đường trung trực của cạnh BC đi qua P và nhận $\overrightarrow{MN}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :

$$2(x - 9) + 8(y - 1) = 0 \text{ hay } x + 4y - 13 = 0.$$



Hình 92

Tương tự, ta được phương trình các đường trung trực của các cạnh AB, AC lần lượt là : $x - y + 2 = 0$, $x - 1 = 0$.

3. Xét điểm $M(x_M ; y_M)$ tuỳ ý thuộc Δ.

a) Gọi $N(x_N ; y_N)$ là điểm đối xứng với M qua Ox. Khi đó $\begin{cases} x_N = x_M \\ y_N = -y_M \end{cases}$.

Do đó : $M \in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0$

$\Leftrightarrow ax_N - by_N + c = 0 \Leftrightarrow N \in \Delta_1 : ax - by + c = 0.$

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Ox là $ax - by + c = 0$.

b) Gọi $P(x_P ; y_P)$ là điểm đối xứng với M qua Oy.

Khi đó ta có $\begin{cases} x_P = -x_M \\ y_P = y_M. \end{cases}$

Do đó : $M \in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow -ax_P + by_P + c = 0$

$\Leftrightarrow ax_P - by_P - c = 0 \Leftrightarrow P \in \Delta_2 : ax - by - c = 0.$

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua Oy là $ax - by - c = 0$.

c) Gọi $Q(x_Q ; y_Q)$ là điểm đối xứng với M qua O. Khi đó ta có $\begin{cases} x_Q = -x_M \\ y_Q = -y_M. \end{cases}$

Do đó : $M \in \Delta \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0 \Leftrightarrow -ax_Q - by_Q + c = 0$

$\Leftrightarrow ax_Q + by_Q - c = 0 \Leftrightarrow Q \in \Delta_3 : ax + by - c = 0.$

Vậy phương trình đường thẳng đối xứng với Δ qua O là $ax + by - c = 0$.

4. *Cách 1*. Rõ ràng $A \notin \Delta$, lấy $M(1 ; 1) \in \Delta$. Khi đó điểm M' đối xứng với M qua A có toạ độ $M' = (1 ; 5)$. Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua A sẽ đi qua M' và song song với Δ. Ta tìm được phương trình Δ' là $x - 2y + 9 = 0$.

Cách 2. Xét điểm $M(x_1 ; y_1)$ tuỳ ý thuộc Δ và gọi $M'(x_2 ; y_2)$ là điểm đối xứng của M qua A. Suy ra $x_1 = 2 - x_2$, $y_1 = 6 - y_2$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - x_2 - 2(6 - y_2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 - 2y_2 + 9 = 0$
$\Leftrightarrow M' \in \Delta' : x - 2y + 9 = 0.$

5. a) Cắt nhau ; b) Song song ; c) Trùng nhau.

d) Nếu $m \neq -1$ thì d_1 cắt d_2, nếu $m = -1$ thì $d_1 // d_2$.

6. $D = \begin{vmatrix} 4 & -m \\ 2m+6 & 1 \end{vmatrix} = 4.1 - (-m)(2m+6) = 2m^2 + 6m + 4$

$= 2(m+1)(m+2)$.

$D_x = \begin{vmatrix} -m & 4-m \\ 1 & -2m-1 \end{vmatrix} = (-m)(-2m-1) - 1(4-m)$

$= 2m^2 + 2m - 4 = 2(m-1)(m+2)$.

$D_y = \begin{vmatrix} 4-m & 4 \\ -2m-1 & 2m+6 \end{vmatrix} = (4-m)(2m+6) - 4(-2m-1)$

$= -2m^2 + 10m + 28 = -2(m-7)(m+2)$.

– Xét $D \neq 0 \Leftrightarrow 2(m+1)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq -2$. Khi đó Δ_1 và Δ_2 cắt nhau và giao điểm của Δ_1 và Δ_2 có toạ độ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2(m-1)(m+2)}{2(m+1)(m+2)} = \dfrac{m-1}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-2(m-7)(m+2)}{2(m+1)(m+2)} = \dfrac{7-m}{m+1}. \end{cases}$$

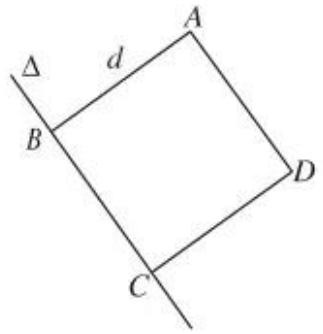
– Xét $D = 0 \Leftrightarrow 2(m+1)(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = -2$.

Với $m = -1$ thì $D_x = 2.(-2).1 = -4 \neq 0$. Khi đó Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

Với $m = -2$ thì $D = D_x = D_y = 0$. Khi đó Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.

7. (h. 93)

a) Đường thẳng d qua A và vuông góc với Δ có phương trình $2(x+1) + y - 3 = 0$ hay $2x + y - 1 = 0$.



Hình 93

Toạ độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $B = (0\ ;\ 1)$.

$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Toạ độ của C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x_C - 2y_C + 2 = 0 \\ \sqrt{x_C^2 + (y_C - 1)^2} = \sqrt{5}. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 2 \end{cases}$. Nghiệm đầu bị loại do $y_C = 0$.

Vậy $C = (2 ; 2)$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Suy ra $\begin{cases} x_D - 2 = -1 - 0 \\ y_D - 2 = 3 - 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4. \end{cases}$ Vậy $D = (1 ; 4)$.

b) Chu vi hình vuông $ABCD$ bằng $4\sqrt{5}$, diện tích bằng 5.

8. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của Δ với các trục Ox, Oy, ta có $M = \left(-\frac{c}{a} ; 0\right)$, $N = \left(0 ; -\frac{c}{b}\right)$. Tam giác tạo bởi Δ và các trục Ox, Oy là tam giác vuông OMN có diện tích $S = \frac{1}{2}OM.ON = \frac{1}{2}\left|-\frac{c}{a}\right|\left|-\frac{c}{b}\right| = \frac{1}{2}\frac{c^2}{|ab|}$.

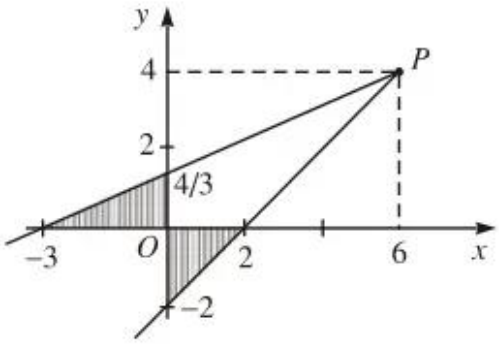
9. (h. 94) Giả sử $\Delta \cap Ox = A(a ; 0)$, $\Delta \cap Oy = B(0 ; b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Phương trình của Δ : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$P \in \Delta \Rightarrow \frac{6}{a} + \frac{4}{b} = 1.$ (1)

$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}|ab| = 2$

$\Rightarrow |ab| = 4.$ (2)



Hình 94

Từ (1) suy ra $b = \frac{4a}{a-6}$ ($a \neq 6$ vì nếu $a = 6$ thì (1) trở thành $\frac{4}{b} = 0$: vô lí).

Thay vào (2) ta được $\left|a.\frac{4a}{a-6}\right| = 4 \Leftrightarrow a^2 = |a - 6|.$ (3)

Với $a > 6$ thì (3) $\Leftrightarrow a^2 - a + 6 = 0$: phương trình vô nghiệm.

Với $a < 6$ thì (3) $\Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0$, khi đó $a = 2$ hoặc $a = -3$.

– Trường hợp $a = 2 \Rightarrow b = -2$, ta có đường thẳng Δ_1 : $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$.

– Trường hợp $a = -3 \Rightarrow b = \frac{4}{3}$, ta có đường thẳng Δ_2 : $\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$.

10. Giả sử $M = (m\ ;\ 0)$, $N = (0\ ;\ n)$ với $m, n > 0$. Phương trình của Δ là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

$Q \in \Delta \Rightarrow \frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow\ n = \frac{3m}{m-2}$ (dễ thấy $m \neq 2$). Do $n > 0$ nên $m > 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$OM + ON = m + n = m + \frac{3m}{m-2}$$

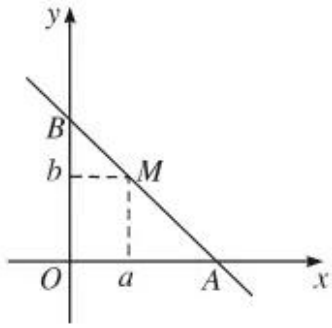
$$= m - 2 + \frac{6}{m-2} + 5 \geq 2\sqrt{(m-2).\frac{6}{m-2}} + 5 = 2\sqrt{6} + 5.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 = \frac{6}{m-2}$ hay $m = 2 + \sqrt{6}$ (do $m > 0$).

Suy ra $n = 3 + \sqrt{6}$. Vậy $OM + ON$ nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6} + 5$ khi $m = 2 + \sqrt{6}$ và $n = 3 + \sqrt{6}$. Khi đó phương trình của Δ là $\frac{x}{2+\sqrt{6}} + \frac{y}{3+\sqrt{6}} = 1$.

11. (h. 95) Gọi $A = (x_0\ ;\ 0)$, $B = (0\ ;\ y_0)$.

Khi đó $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$.



Hình 95

$$M \in AB \Rightarrow \frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} = 1.$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}x_0y_0.$$

Ta có : $1 = \frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{x_0y_0}} \Rightarrow x_0y_0 \geq 4ab.$

Do đó $S_{OAB} = \frac{1}{2}x_0y_0 \geq \frac{1}{2}4ab = 2ab.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x_0} = \frac{b}{y_0} = \frac{1}{2}$ hay $\begin{cases} x_0 = 2a \\ y_0 = 2b. \end{cases}$

Vậy, diện tích tam giác OAB nhỏ nhất bằng $2ab$ khi $\begin{cases} x_0 = 2a \\ y_0 = 2b. \end{cases}$

Phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x}{2a} + \dfrac{y}{2b} = 1$.

12. a) Học sinh tự làm.

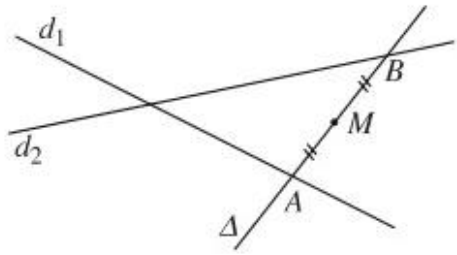
b) (h. 96) *Cách 1.* $A(x_A\,;\,y_A) \in d_1 \Rightarrow y_A = 2x_A - 2$;

$B(x_B\,;\,y_B) \in d_2 \Rightarrow y_B = -x_B - 3$.

Vì M là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 6 \\ 2x_A - 2 - x_B - 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_A = \dfrac{11}{3} \Rightarrow y_A = \dfrac{16}{3}$.

Vậy $A = \left(\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{16}{3}\right)$.



Hình 96

Đường thẳng MA trùng với đường thẳng Δ. Từ đó ta tìm được phương trình của Δ là $8x - y - 24 = 0$.

Cách 2. Dễ thấy đường thẳng Δ cần tìm không vuông góc với Ox. Gọi k là hệ số góc của Δ thì phương trình của Δ có dạng : $y = k(x - 3)$.

Gọi $A = \Delta \cap d_1$, $B = \Delta \cap d_2$. Khi đó hoành độ của A là nghiệm của phương trình : $2x - 2 = k(x - 3)$.

Suy ra $x_A = \dfrac{3k - 2}{k - 2}$ ($k \neq 2$ vì nếu $k = 2$ thì phương trình $2x - 2 = k(x - 3)$ vô nghiệm).

Hoành độ của B là nghiệm của phương trình $-x - 3 = k(x - 3)$.

Suy ra $x_B = \dfrac{3k - 3}{k + 1}$ ($k \neq -1$ vì nếu $k = -1$ thì phương trình $-x - 3 = k(x - 3)$ vô nghiệm). Từ giả thiết M là trung điểm của AB suy ra :

$$x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow \frac{3k - 2}{k - 2} + \frac{3k - 3}{k + 1} = 6 \Leftrightarrow k = 8.$$

Vậy phương trình của Δ là $y = 8(x - 3)$ hay $8x - y - 24 = 0$.

13. (h. 97) $A(0\ ;\ 0)$, $C(6\ ;\ 0) \Rightarrow A,\ C \in Ox \Rightarrow P,\ Q \in Ox \Rightarrow P = (x_P\ ;\ 0)$, $Q = (x_Q\ ;\ 0)$ với $0 < x_P < x_Q < 6$.

Phương trình đường thẳng AB : $y = 2x$;

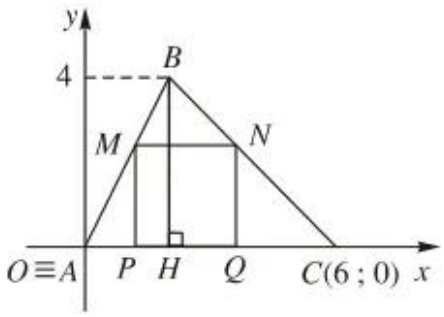
Phương trình đường thẳng AC : $y = 0$.

Gọi cạnh hình vuông là a. Ta có :

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{BM}{BA} \quad (1).$$

Kẻ $BH \perp AC$, suy ra $BH = 4$. Ta có :

$$\frac{MP}{BH} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{AM}{AB} \quad (2).$$



Hình 97

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{a}{6} + \frac{a}{4} = \frac{BM}{AB} + \frac{AM}{AB} = 1$. Do đó $a = \frac{12}{5}$.

Vậy $y_M = y_N = \frac{12}{5}$. Do $M \in AB$ nên $y_M = 2x_M$, suy ra $x_M = \frac{6}{5}$,

$x_P = x_M = \frac{6}{5}$. Vì $PQ = x_Q - x_P$ nên $x_Q = x_P + a = \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$.

Các điểm cần tìm là : $M\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$, $P\left(\frac{6}{5};0\right)$, $Q\left(\frac{18}{5};0\right)$, $N\left(\frac{18}{5};\frac{12}{5}\right)$.