

§2. Phương trình tham số của đường thẳng

14. a) $x + 2y - 7 = 0$; b) $x + y = 0$; c) $x + 3 = 0$; d) $y - 4 = 0$.
15. a) *Cách 1.* Lấy hai điểm, chẳng hạn $M(0; -2)$ và $N(1; 1)$ thuộc đường thẳng $\Delta : 3x - y - 2 = 0$. Khi đó $\overrightarrow{MN}(1; 3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ nên Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$.

Cách 2. Cho $y = t$, ta được $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$. Đường thẳng đã cho có phương trình tham số $\begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \\ y = t \end{cases}$.

Chú ý : Các phương trình tìm được ở cách 1 và cách 2 tuy khác nhau nhưng đều là các phương trình tham số của cùng một đường thẳng đã cho.

b) $\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = t; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = t \\ y = 6. \end{cases}$

16. a) d song song với đường thẳng $5x + 1 = 0$ nên nó nhận $\vec{u}(0 ; -5)$ là một vectơ chỉ phương. Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 5t \end{cases}$ và không có phương trình chính tắc.

b) d vuông góc với đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ nên nó nhận vectơ pháp tuyến $\vec{u}(1 ; 3)$ của đường thẳng này làm vectơ chỉ phương. Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$ và phương trình chính tắc $\frac{x - 7}{1} = \frac{y + 5}{3}$.

c) d đi qua $C(-2 ; 3)$ và có hệ số góc $k = -3$ nên d có phương trình $y = -3(x + 2) + 3$ hay $3x + y + 3 = 0$. Do đó $\vec{u}(-1 ; 3)$ là một vectơ chỉ phương của d . Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ và phương trình chính tắc $\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 3}{3}$.

d) $\overrightarrow{MN}(2 ; -9)$ là vectơ chỉ phương của d , nên d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 - 9t \end{cases}$ và phương trình chính tắc : $\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 6}{-9}$.

17. d_1 đi qua $M_1(x_1 ; y_1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b)$, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{v}(c ; d)$.

a) d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và \vec{v} không cùng phương $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.

b) $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương và $M_1(x_1 ; y_1) \notin d_2$

$$\Leftrightarrow ad - bc = 0 \text{ và } d(x_1 - x_2) \neq c(y_1 - y_2).$$

c) $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \vec{u}$ và \vec{v} cùng phương và $M_1(x_1 ; y_1) \in d_2$

$$\Leftrightarrow ad - bc = 0 \text{ và } d(x_1 - x_2) = c(y_1 - y_2).$$

d) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow ac + bd = 0$.

18. a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(2; -3)$, Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(1; 2)$.
 \vec{u}_1 và \vec{u}_2 không cùng phương nên Δ_1 và Δ_2 cắt nhau. Toạ độ giao điểm M của Δ_1 và Δ_2 ứng với nghiệm t của phương trình :

$$2(1+2t) - (-3-3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{7}. \text{ Suy ra } M = \left(-\frac{1}{7}; -\frac{9}{7}\right).$$

b) $\Delta_1 // \Delta_2$.

c) Toạ độ giao điểm N của Δ_1 và Δ_2 ứng với nghiệm t, t' của hệ phương trình :
$$\begin{cases} -2+t=4t' \\ -t=2-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{10}{3} \\ t'=-\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Thay t vào phương trình của Δ_1 (hoặc thay t' vào phương trình của Δ_2), ta được toạ độ của N là $\left(-\frac{16}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

d) $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

19. a) Toạ độ của M ứng với nghiệm t, t' của hệ
$$\begin{cases} 2-3t=-1-2t' \\ 1+t=3-t' \end{cases}$$
. Giải hệ ta được $t=\frac{7}{5}, t'=\frac{3}{5}$. Từ đó ta tính được $M=\left(-\frac{11}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

b) d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(-3; 1)$.

Đường thẳng Δ_1 qua M và vuông góc với d_1 nên Δ_1 có phương trình tổng quát :

$$-3\left(x+\frac{11}{5}\right)+1.\left(y-\frac{12}{5}\right)=0 \text{ hay } 3x-y+9=0.$$

Từ phương trình tổng quát, cho $x=t$, ta được phương trình tham số của Δ_1 là

$$\begin{cases} x=t \\ y=9+3t. \end{cases}$$

Tương tự, đường thẳng Δ_2 qua M và vuông góc với d_2 có phương trình tổng quát : $2x+y+2=0$ và phương trình tham số :
$$\begin{cases} x=t' \\ y=-2-2t'. \end{cases}$$

20. a) Có hai điểm $A_1(0; -1), A_2(1; -2)$.

b) MB nhỏ nhất khi B trùng với hình chiếu vuông góc H của M trên Δ .

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-2; 2)$. Vì $H \in \Delta$ nên $H = (-2 - 2t; 1 + 2t)$. Ta có

$$\overrightarrow{MH} = (-5 - 2t; 2t). \text{ Do } MH \perp \Delta \text{ nên } \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = -2.(-5 - 2t) + 2.2t = 0 \text{ hay}$$

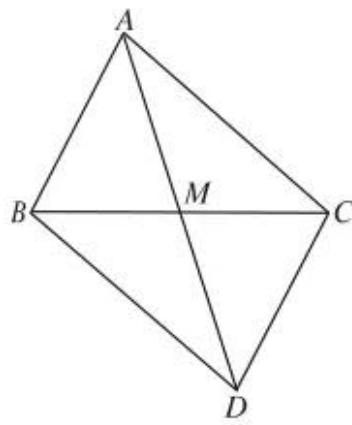
$$t = -\frac{5}{4}. \text{ Vậy } H = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

21. (h. 98) *Cách 1.* Xét tam giác ABC với phương trình các cạnh

$$AB : 2x + 6y + 3 = 0, AC : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}$$

và $M(-1; 1)$ là trung điểm của cạnh BC . Khi đó, ta có hệ :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ y_B + y_C = 2 \end{cases} \quad (1) \\ &\begin{cases} 2x_B + 6y_B + 3 = 0 \\ x_C = 2 - t \end{cases} \quad (2) \\ &\begin{cases} 2x_B + 6y_B + 3 = 0 \\ y_C = t \end{cases} \quad (3) \\ &\begin{cases} x_C = 2 - t \\ y_C = t \end{cases} \quad (4) \\ &\quad (5). \end{aligned}$$



Hình 98

Thay x_C, y_C từ (4), (5) vào (1), (2) và sau đó kết hợp với (3) ta được $t = \frac{7}{4}$.

Do đó $C = \left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$. Suy ra $\overrightarrow{MC} = \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}(5; 3)$. Phương trình của

đường thẳng BC là $\begin{cases} x = -1 + 5t' \\ y = 1 + 3t' \end{cases}$.

Cách 2. Từ phương trình của AB, AC , ta tìm được toạ độ của A và suy ra toạ độ của D (D đối xứng với A qua M). M là trung điểm của BC và AD nên $ABDC$ là hình bình hành, do đó $DC \parallel AB$. Từ đó viết được phương trình của DC và tìm được toạ độ điểm C . Cuối cùng viết được phương trình của MC .

22. Ta dễ tính được $B = (2; 1), C = (0; 5)$, trọng tâm $G = (1; 4)$, suy ra $A = (1; 6)$.

Từ đó viết được phương trình các cạnh $AB : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 6 - 5t \end{cases}, AC : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 6 - t' \end{cases}$.

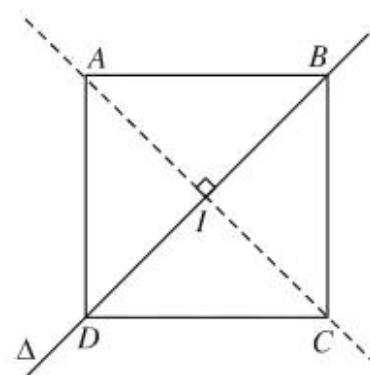
23. (h. 99) $A \notin \Delta$: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \end{cases}$. Vậy $B, D \in \Delta$.

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; -2)$ nên phương trình đường chéo AC là

$$2(x+1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0.$$

Toạ độ giao điểm I của AC và BD ứng với nghiệm t của phương trình :

$$-1 + 2t + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$



Hình 99

Vậy $I = (-2; 1)$. Vì I là trung điểm của AC , nên $C = (-3; 0)$.

$ABCD$ là hình vuông nên $ID = IB = IA$. Do $B \in \Delta$ nên $B = (-1 + 2t; -2t)$.

$$\begin{aligned} IB^2 = IA^2 &\Leftrightarrow (-1 + 2t + 2)^2 + (-2t - 1)^2 = (-1 + 2)^2 + (2 - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow (2t + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1. \end{aligned}$$

Suy ra $B = (-1; 0)$ hoặc $B = (-3; 2)$.

Nếu $B = (-1; 0)$ thì $D = (-3; 2)$, nếu $B = (-3; 2)$ thì $D = (-1; 0)$.

Đến đây, biết toạ độ bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$, ta sẽ dễ dàng viết được phương trình bốn cạnh của hình vuông là :

$$x + 1 = 0; \quad y = 0; \quad x + 3 = 0; \quad y - 2 = 0.$$

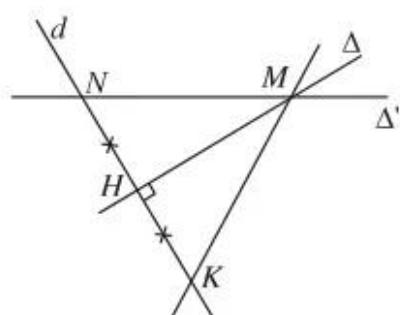
24. (h. 100) Để tìm được giao điểm M của Δ và Δ' có toạ độ là $(-6; 4)$. Điểm $N(-2; 0)$ thuộc Δ' và N khác M .

Đường thẳng d đi qua N và vuông góc với Δ có phương trình :

$$-2(x+2) + y = 0 \text{ hay } 2x - y + 4 = 0.$$

Gọi $H = d \cap \Delta$, suy ra $H = \left(-\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$. Do đó

toạ độ điểm K đối xứng với điểm N qua H là $\left(-\frac{2}{5}; \frac{16}{5}\right)$.



Hình 100

Đường thẳng cần tìm là đường thẳng MK và có phương trình : $x + 7y - 22 = 0$.

25. a) Phương trình của Δ có dạng tổng quát là $x - y + 1 = 0$. Rõ ràng $A, B \notin \Delta$. Xét $C(x; x+1) \in \Delta$.

$$\bullet \Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1)^2 = 4^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 17 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Có hai điểm thoả mãn là $C_1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{2}; \frac{\sqrt{30}+2}{2} \right)$, $C_2 = \left(-\frac{\sqrt{30}}{2}; \frac{2-\sqrt{30}}{2} \right)$.

$$\bullet \Delta ABC \text{ cân tại } B \Leftrightarrow BC^2 = BA^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + x^2 = 17$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 4.$$

Có hai điểm thoả mãn là $C_3 = (-1; 0), C_4 = (4; 5)$.

$$\bullet \Delta ABC \text{ cân tại } C \Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1)^2 = (x-3)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{6}.$$

Có một điểm thoả mãn là $C_5 = \left(\frac{7}{6}; \frac{13}{6} \right)$.

$$\text{b) } \Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} CA = CB \\ CA = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ x = \pm \frac{\sqrt{30}}{2} \end{cases} : \text{ hệ vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại điểm C trên Δ sao cho tam giác ABC đều.