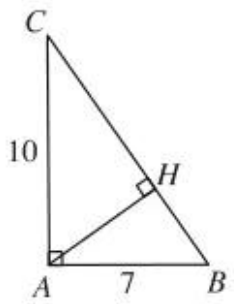
§2. Tích vô hướng của hai vectơ



Hình 27

9. (h. 27) a) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 90^o$ nên $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 180^o - \widehat{ABC}$ nên

$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = -\cos\widehat{ABC} = \dfrac{-7}{\sqrt{149}}$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \widehat{ABC}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{7}{\sqrt{149}}$.

b) $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = HB.HC\cos 180^o = -HB.HC = -AH^2$.

Theo hệ thức trong tam giác vuông $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{149}{4900}$,

suy ra $AH^2 = \dfrac{4900}{149}$. Vậy $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = -\dfrac{4900}{149}$.

10. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 120^o = -\dfrac{35}{2}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 = -\frac{35}{2} - 49 = -\frac{133}{2}.$$

b) M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, suy ra

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}(49 + 25 - 35) = \frac{39}{4},$$

$AM = \dfrac{\sqrt{39}}{2}$.

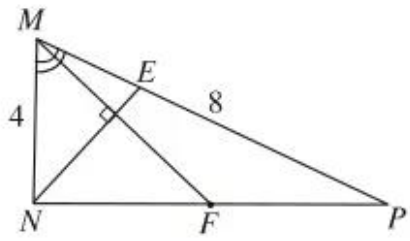
11. (h. 28) $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$,

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right)$.

$NE \perp MF \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right).\left(k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow\ k = \frac{\overrightarrow{MN}.\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right)}{\overrightarrow{MP}.\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}\right)} = \frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}^2}{\overrightarrow{MP}^2 + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}$$

$$= \frac{16 + 16}{64 + 16} = \frac{2}{5}.$$

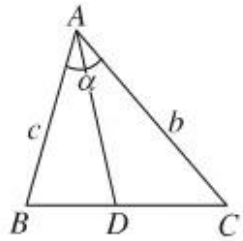


Hình 28

12. (h. 29) a) Theo tính chất của đường phân giác, ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ hay $DB = \frac{c}{b}DC$. Mặt khác $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$. Từ đó dẫn đến $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b + c}$.

b) Bình phương vô hướng để tính độ dài AD.

ĐS: $\frac{bc}{b + c}\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}$.



Hình 29

13. $\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}^2 - \vec{b}^2\right) = \vec{a}.\vec{b}$.

14. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - c^2 - a^2\right).$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right).$$

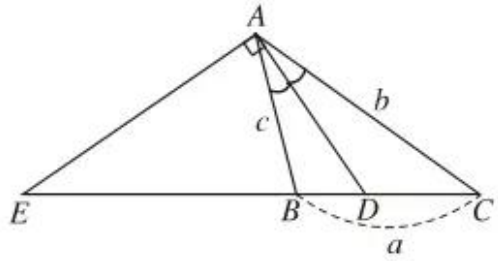
b) Vì AM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên :

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(c^2 + b^2 + c^2 + b^2 - a^2\right) = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right).$$

Vậy : $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

15. Xét tam giác ABC có AD, AE lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài (h. 30). Theo bài 12a) ta có $\overrightarrow{AD} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b + c}$. Hãy bình phương vô hướng cả hai vế và sử dụng đẳng thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ (theo bài 14) để tính độ dài đoạn AD. Vì AE là phân giác ngoài nên $\overrightarrow{EB} = \frac{c}{b}\overrightarrow{EC}$ (lưu ý rằng phân giác ngoài của góc A chỉ cắt đường thẳng BC khi $b \neq c$). Từ đó $\overrightarrow{AE} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}}{b - c}$.



Hình 30

ĐS: $AD = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp(p - a)}$;

$AE = \frac{2}{|b - c|}\sqrt{bc(p - b)(p - c)}$

($p = \frac{a + b + c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác).

16. Giả sử $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$. Nếu $\vec{a}.\vec{b} = 0$ thì $\vec{b}.\vec{c} = 0$ (vì $\vec{a} \neq \vec{0}$). Vậy cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng vuông góc với $\vec{b}$ hay $\vec{a} = k\vec{c}$. Nếu $\vec{a}.\vec{b} \neq 0$ thì $\vec{b}.\vec{c} \neq 0$. Khi đó $\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{c}}\right).\vec{c}$ hay $\vec{a} = k\vec{c}$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = k\vec{c}$ thì $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = (k\vec{c}.\vec{b})\vec{c} = k(\vec{c}.\vec{b})\vec{c} = (\vec{b}.\vec{c})k\vec{c} = (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$.

Như vậy, đẳng thức $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$ đúng khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{c}$.

17. a) Gọi O là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

Với mọi điểm M, ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= MO^2 - OB^2 = MO^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Từ đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MO^2 - \frac{a^2}{4} = k \Leftrightarrow MO^2 = \frac{a^2}{4} + k.$ (*)

Ta có O cố định, $\frac{a^2}{4} + k$ là số không đổi nên :

– Nếu $k < -\frac{a^2}{4}$ thì tập các điểm M là tập rỗng.

– Nếu $k = -\frac{a^2}{4}$ thì tập các điểm M chỉ gồm một điểm O.

– Nếu $k > -\frac{a^2}{4}$ thì tập các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4k}$.

b) Lấy điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Từ đó có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại điểm C.

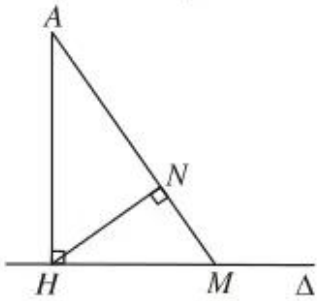
18. (h. 31) Ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM}$ (theo công thức hình chiếu)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HN}.\overrightarrow{AM} = 0.$



Vậy tập hợp các điểm N là đường tròn đường kính AH. *Hình 31*

19. a) Theo định nghĩa của tích vô hướng ta có (với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$) :

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA_i} = OM.OA_i.\cos\widehat{MOA_i} = R^2\cos\widehat{MOA_i}.$$

Do đó : $\cos\widehat{MOA_1} + \cos\widehat{MOA_2} + ... + \cos\widehat{MOA_n} =$

$$= \frac{1}{R^2}\overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right).$$

Theo bài 7 (chương I) thì $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, nên :

$$\cos\widehat{MOA_1} + \cos\widehat{MOA_2} + ... + \cos\widehat{MOA_n} = 0.$$

b) $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2 = \overrightarrow{MA_1}^2 + \overrightarrow{MA_2}^2 + ... + \overrightarrow{MA_n}^2$

$= \left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + ... + \left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OM}\right)^2$

$= OA_1^2 + OA_2^2 + ... + OA_n^2 + nOM^2 - 2\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right).\overrightarrow{OM}$

$= R^2 + R^2 + ... + R^2 + nR^2 - 0 = 2nR^2$.

20. Từ điều kiện $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, ta suy ra :

$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$ hay $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Bởi vậy : $AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left[(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}\right]^2$

$= (1-k)^2\overrightarrow{AB}^2 + k^2\overrightarrow{AC}^2 + 2k(1-k)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= (1-k)^2c^2 + k^2b^2 + 2k(1-k).\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right)$ (xem bài tập 14)

$= (1-k)c^2 + kb^2 - k(1-k)a^2$.

Trong trường hợp $k = \frac{1}{2}$ thì M là trung điểm của cạnh BC, AM là đường trung tuyến. Khi đó ta có công thức trung tuyến : $AM^2 = \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

21. a) $\vec{u} = ca.\cos(180^o - B)\overrightarrow{CA} + ab.\cos(180^o - C)\overrightarrow{AB} + bc.\cos(180^o - A)\overrightarrow{BC}$

$= -ca\cos B.\overrightarrow{CA} - ab.\cos C.\overrightarrow{AB} - bc.\cos A.\overrightarrow{BC}$

$= -abc\left(\cos B\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \cos C\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \cos A\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)$.

b) Nếu tam giác ABC đều thì $a = b = c$, $\cos A = \cos B = \cos C$, từ đó suy ra $\vec{u} = -a^2.\cos A.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$.

c) Nhân vô hướng vectơ $\vec{u} = \vec{0}$ lần lượt với $\frac{\overrightarrow{CA}}{b}$, $\frac{\overrightarrow{AB}}{c}$ và $\frac{\overrightarrow{BC}}{a}$ ta có :

$\vec{u}.\frac{\overrightarrow{CA}}{b} = 0$, suy ra $\cos B - 2\cos C.\cos A = 0.$

Tương tự ta có : $\cos C - 2\cos A.\cos B = 0,$

$\cos A - 2\cos B.\cos C = 0.$

Rút cos$B$ từ đẳng thức đầu và thay vào đẳng thức thứ hai, ta có :

$\cos C - 4\cos^2 A.\cos C = 0$ mà $\cos C \neq 0$ (vì nếu cos$C$ = 0 thì cos$B$ = 0, $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^o$, vô lí) nên $\cos^2 A = \frac{1}{4}$ hay $\cos A = \pm\frac{1}{2}$. Vậy $\widehat{A} = 60^o$, hoặc $\widehat{A} = 120^o$.

Tương tự như vậy, góc C hoặc bằng 60° hoặc bằng 120°. Vì tổng ba góc của tam giác bằng 180°, nên chỉ có thể có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^o$. Vậy ABC là tam giác đều.

22. (h. 32) $2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$

$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

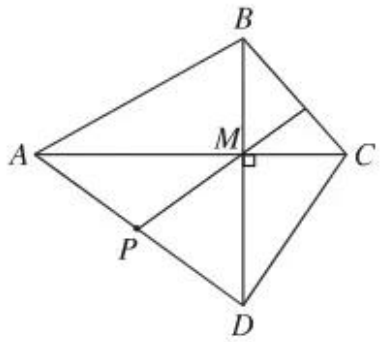
$= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

(vì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} = 0$ do $AC \perp BD$).

Từ đó ta có :

$MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}.$



Hình 32

23. Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$.

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b})$.

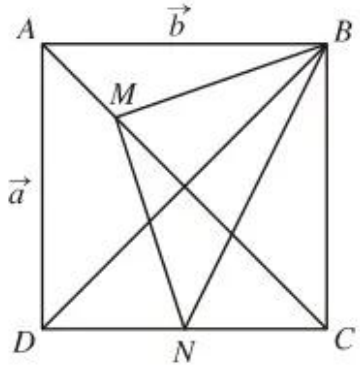
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} - \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b}).$$

Ta có : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{16}\left(-\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(3\vec{a} + \vec{b}\right)$

$$= \frac{1}{16}\left(-3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a}.\vec{b}\right) = 0.$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = \frac{1}{16}\left(-\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a}.\vec{b}\right) = \frac{5}{8}\vec{a}^2.$$

$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}\left(3\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a}.\vec{b}\right) = \frac{5}{8}\vec{a}^2.$$



Hình 33

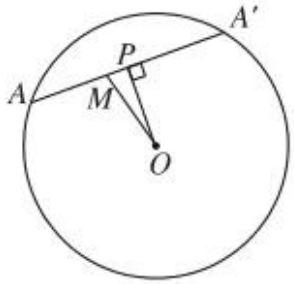
Vậy $MB \perp MN$ *và* $MB = MN$, tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M.

24. (h. 34) Gọi P là trung điểm của AA' thì $OP \perp AA'$ nên theo công thức hình chiếu ta có :

$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MP}$. Nhưng vì P là trung điểm của AA' nên $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}$. Vậy :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}\right) = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$$

$$= MA^2 - MA.MA' = MA(MA - MA').$$

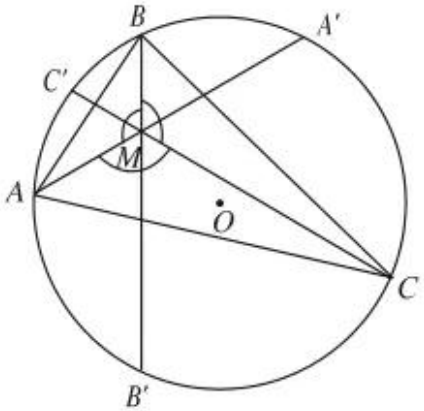


Hình 34

25. (h. 35) Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho :

$\overrightarrow{MA_1} = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}$; $\overrightarrow{MB_1} = \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}$ và $\overrightarrow{MC_1} = \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$,

khi đó cả ba vectơ trên đều có độ dài bằng 1, mà góc giữa hai vectơ bất kì trong chúng đều bằng 120° nên M là tâm của tam giác đều $A_1B_1C_1$.



Hình 35

Theo bài 24, ta có :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = MA(MA - MA'),$$

suy ra $\quad 2\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}.\overrightarrow{MO} = MA - MA',$

hay $\quad 2\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MO} = MA - MA'.$

Tương tự : $\quad 2\overrightarrow{MB_1}.\overrightarrow{MO} = MB - MB',$

$$2\overrightarrow{MC_1}.\overrightarrow{MO} = MC - MC'.$$

Từ đó ta có $MA + MB + MC - MA' - MB' - MC'$

$$= 2\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}\right).\overrightarrow{MO} = 0,$$

hay $\quad MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'.$

26. a) Lấy một điểm O bất kì thì đẳng thức

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

tương đương với

$$k_1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}\right) + k_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}\right) + ... + k_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$

hay $\quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{k}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right).$

Điều đó chứng tỏ rằng có điểm G thoả mãn (1).

Giả sử điểm G' cũng thoả mãn $k_1\overrightarrow{G'A_1} + k_2\overrightarrow{G'A_2} + ... + k_n\overrightarrow{G'A_n} = \vec{0}$ (2). Bằng cách trừ theo vế (1) cho (2) ta được $k.\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ hay G' trùng với G. (Điểm G được gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ gắn với các hệ số $k_1, k_2, ..., k_n$).

b) Với mọi điểm M, ta có

$$k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$$

$$\Leftrightarrow k_1\overrightarrow{MA_1}^2 + k_2\overrightarrow{MA_2}^2 + ... + k_n\overrightarrow{MA_n}^2 = m$$

$$\Leftrightarrow k_1\left(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + k_2\left(\overrightarrow{GA_2} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + ... + k_n\left(\overrightarrow{GA_n} - \overrightarrow{GM}\right)^2 = m$$

$$\Leftrightarrow k_1GA_1^2 + k_2GA_2^2 + ... + k_nGA_n^2 + kGM^2 -$$

$$2\overrightarrow{GM}\left(k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n}\right) = m.$$

Ta đặt $k_1GA_1^2 + k_2GA_2^2 + ... + k_nGA_n^2 = s$ thì đẳng thức trên tương đương với $s + kGM^2 = m$ hay $GM^2 = \dfrac{m-s}{k}$. Từ đó suy ra

• Nếu $\dfrac{m-s}{k} > 0$ thì quỹ tích các điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $r = \sqrt{\dfrac{m-s}{k}}$.

• Nếu $m - s = 0$ thì quỹ tích các điểm M là một điểm G.

• Nếu $\dfrac{m-s}{k} < 0$ thì quỹ tích các điểm M là tập rỗng.

Chú ý. Khi $k_1 + k_2 + ... + k_n = k = 0$ thì hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ không có tâm tỉ cự, song vectơ $\vec{u} = k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n}$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm O. Thực vậy, với điểm O' khác điểm O, ta có :

$$k_1\overrightarrow{O'A_1} + k_2\overrightarrow{O'A_2} + ... + k_n\overrightarrow{O'A_n}$$

$$= (k_1 + k_2 + ... + k_n)\overrightarrow{O'O} + k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n} = \vec{u}.$$

Bây giờ chọn một điểm O nào đó, ta có :

$$k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$$

$$\Leftrightarrow\ k_1\overrightarrow{MA_1}^2 + k_2\overrightarrow{MA_2}^2 + ... + k_n\overrightarrow{MA_n}^2 = m$$

$$\Leftrightarrow\ k_1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + k_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + ... + k_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OM}\right)^2 = m$$

$$\Leftrightarrow\ k_1OA_1^2 + k_2OA_2^2 + ... + k_nOA_n^2 - 2\overrightarrow{OM}.\vec{u} = m.$$

Đặt $k_1OA_1^2 + k_2OA_2^2 + ... + k_nOA_n^2 = s$ thì đẳng thức trên trở thành :

$$2\vec{u}.\overrightarrow{OM} = s - m.$$

Bởi vậy : • Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ và $s = m$ thì quỹ tích các điểm M là toàn bộ mặt phẳng.

• Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ và $s \neq m$ thì quỹ tích các điểm là tập rỗng.

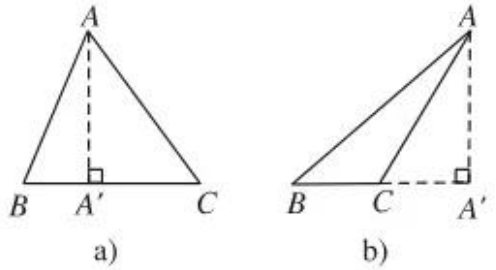
• Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm M là một đường thẳng vuông góc với vectơ $\vec{u}$.

27. a) Xét trường hợp điểm A' nằm trên cạnh BC, tức là các góc B và C đều nhọn (h. 36a). Khi đó

$$AA' = A'B.\tan B = A'C.\tan C.$$

Vì $\tan B > 0$, $\tan C > 0$ và hai vectơ $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}$ ngược hướng nên ta suy ra:

$$(\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C} = \vec{0}. \quad (*)$$



Hình 36

Nếu điểm A' nằm ngoài cạnh BC, chẳng hạn điểm C nằm giữa hai điểm B và A' (h. 36b), thì khi đó góc B nhọn và góc C tù, tức là $\tan B > 0$ và $\tan C < 0$. Ta có $AA' = A'B\tan B = A'C\tan(180^o - C) = -A'C\tan C$. Trong trường hợp này hai vectơ $\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}$ cùng hướng nên ta có: $(\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

b) Nếu H là trực tâm tam giác ABC thì ta có các số α, β, γ không đồng thời bằng 0 sao cho : $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ (theo bài 14 chương I). Vì $HA \perp BC$, nên nhân hai vế của đẳng thức trên với $\overrightarrow{BC}$ ta được $\beta\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, và do đó (theo công thức hình chiếu)

$\beta\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left(\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ (vì vectơ $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$).

So sánh đẳng thức này với (*) ta suy ra $\dfrac{\beta}{\tan B} = \dfrac{\gamma}{\tan C}$. Bằng cách tương tự ta đi đến :

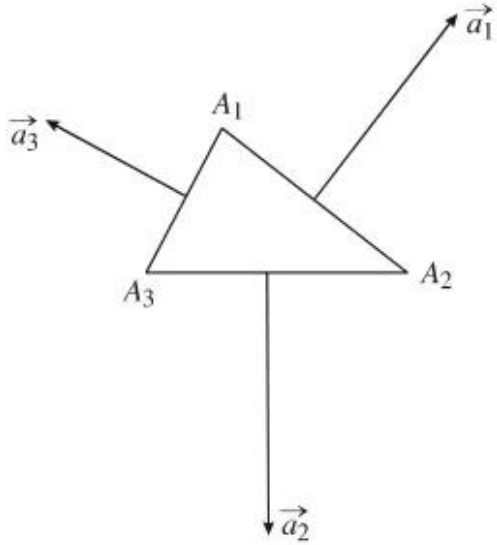
$$\frac{\alpha}{\tan A} = \frac{\beta}{\tan B} = \frac{\gamma}{\tan C}.$$

Bởi vậy đẳng thức $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ trở thành :

$$\tan A.\overrightarrow{HA} + \tan B.\overrightarrow{HB} + \tan C.\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

28. (h. 37) Ta có

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}).\overrightarrow{A_1A_2}\\
&= (\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}).\overrightarrow{A_1A_2}\\
&= \left(\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}\right)\left(\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_2A_3}\right)\\
&= \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{a_3}.\overrightarrow{A_2A_3}\\
&= \left|\overrightarrow{a_2}\right|.A_1A_3.\cos\left(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right)\\
&\quad - \left|\overrightarrow{a_3}\right|.A_2A_3.\cos\left(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{A_2A_3}\right).
\end{aligned}$$



Hình 37

Theo giả thiết $\left|\overrightarrow{a_2}\right| = A_2A_3$ và $\left|\overrightarrow{a_3}\right| = A_1A_3$.

Ngoài ra dễ thấy

$$\cos\left(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \cos\left(\overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{A_2A_3}\right).$$

Suy ra $\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}\right).\overrightarrow{A_1A_2} = 0$. Do đó, vectơ $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ vuông góc với đường thẳng A_1A_2.

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta có vectơ $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$ vuông góc với đường thẳng A_2A_3.

Vậy $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$.

29. Nếu A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn $(\mathscr{C})$ thì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ cũng bằng phương tích của điểm M đối với đường tròn $(\mathscr{C})$ nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

Ngược lại, vẽ đường tròn qua ba điểm A, B, C và giả sử đường tròn đó cắt đường thẳng CD ở điểm D' khác C. Khi đó ta có A, B, C, D' cùng thuộc một đường tròn nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$. Nếu có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ thì $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$, suy ra $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DD'} = 0$. Do $\overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{DD'}$ cùng phương với $\overrightarrow{MC}$ nên $\overrightarrow{DD'} = \vec{0}$ hay D, D' trùng nhau. Vậy A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

30. Giải tương tự như bài 29.

31. $\mathscr{P}_{M/(O,R)} = \mathscr{P}_{M/(O',R')}$

$\Leftrightarrow MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{MO'}^2 = R^2 - R'^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}\right).\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}\right) = R^2 - R'^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{O'O}.\overrightarrow{MI} = R^2 - R'^2$, trong đó I là trung điểm của OO'.

Lấy H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng OO', ta có

$$\overrightarrow{O'O}.\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{O'O}.\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{IH}.$$

Từ đó suy ra $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$ không đổi nên H là điểm cố định.

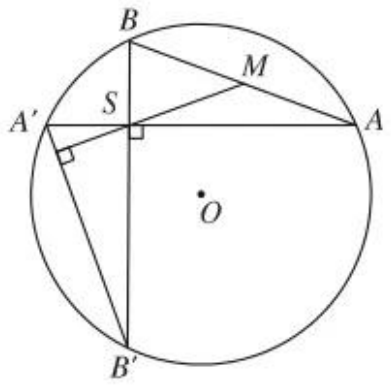
Vậy $\mathscr{P}_{M/(O,R)} = \mathscr{P}_{M/(O',R')}$ khi và chỉ khi M thuộc đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng OO' tại điểm cố định H.

Đường thẳng Δ được gọi là *trục đẳng phương* của hai đường tròn đã cho.

32. (h. 38) Xét tích vô hướng

$$\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}\right).\left(\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA'}\right).$$



Hình 38

Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB'} = 0$ do $SA \perp SB'$,

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA'} = 0$ do $SB \perp SA'$,

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'}$.

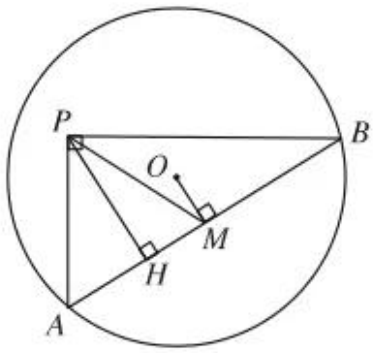
Từ đó suy ra $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{A'B'} = 0$, nên $SM \perp A'B'$.

33. (h. 39) Ta có $\mathscr{P}_{H/(O)} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = -HP^2$

và $\mathscr{P}_{H/(O)} = HO^2 - R^2$,

suy ra $HO^2 - R^2 = -HP^2$

hay $HO^2 + HP^2 = R^2$. (*)



Hình 39

Tương tự $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MB^2$

và $\mathscr{P}_{M/(O)} = MO^2 - R^2$.

Mặt khác tam giác vuông APB có trung tuyến $MP = \frac{1}{2}AB = MB$.

Từ đó suy ra $MO^2 - R^2 = -MP^2$ hay $MO^2 + MP^2 = R^2$. (**)

Từ (*) và (**) ta có H, M cùng thuộc đường tròn có tâm là trung điểm của OP và bán kính bằng $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OP^2}$.

34. Đặt tên các tiếp điểm của hai đường tròn như hình 40.

Ta có $AR = AS$ và

$$AR + AS = (AB + BR) + (AC + CS)$$
$$= (AB + BH) + (AC + CH)$$
$$= AB + BC + AC = 2p.$$

Vậy $AR = AS = p$, suy ra

$c + BH = p$ hay $BH = p - c$.

Ta cũng có

$AP = AQ$, $BP = BK$, $CK = CQ$

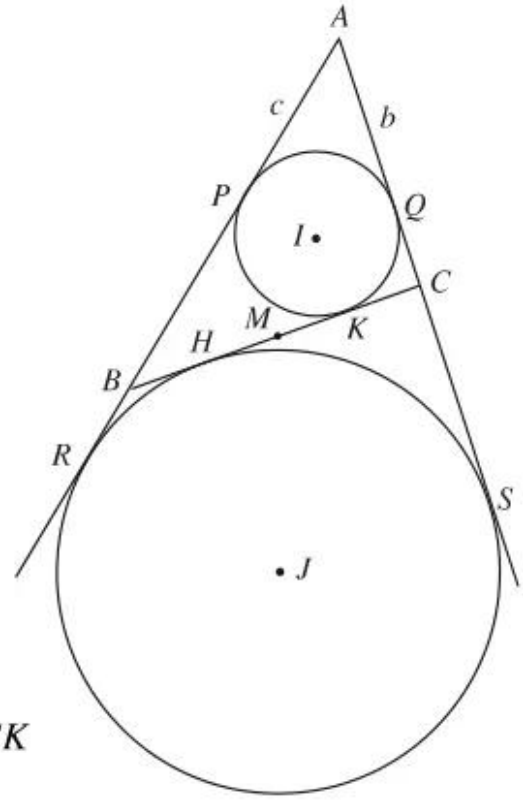
nên $c + CK = b + BK$.

Do $(c + CK) + (b + BK) = a + b + c = 2p$,

nên $c + CK = p$ hay $CK = p - c = BH$.

Gọi M là trung điểm của BC, từ $BH = CK$ suy ra $MH = MK$ hay

$$\mathscr{P}_{M/(I)} = MK^2 = MH^2 = \mathscr{P}_{M/(J)}.$$



Hình 40

Vậy M thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (J).

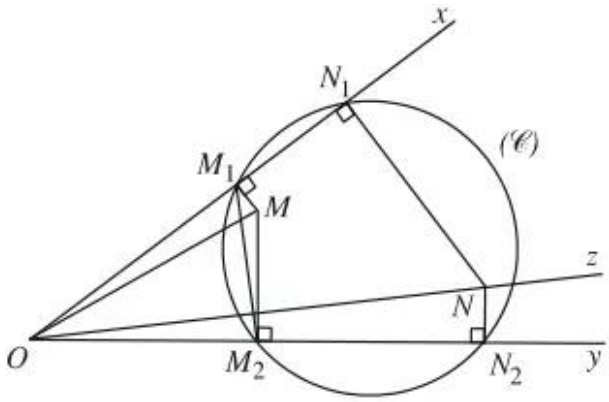
35. (h. 41) a) Ta có

$$\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{ON_1} = \overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{ON_2}. \qquad (*)$$

Xét tích vô hướng

$$\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{ON}.(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})$$
$$= \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_1}.$$

Do $\overrightarrow{ON_1}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{ON}$ trên Ox nên $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{ON_1}.\overrightarrow{OM_1}$.



Hình 41

Tương tự $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{ON_2}.\overrightarrow{OM_2}$. (**)

Từ (*) và (**), suy ra $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ hay $ON \perp M_1M_2$.

b) Theo câu a), N thuộc tia Oz cố định (vuông góc với M_1M_2).

Lại có $\widehat{zOy} = \widehat{M_1M_2M}$ (do $Oz \perp M_2M_1$, $Oy \perp M_2M$).

Mặt khác, OM_1MM_2 là tứ giác nội tiếp ($\widehat{OM_1M} = \widehat{OM_2M} = 90^o$) nên $\widehat{M_1M_2M} = \widehat{M_1OM}$. Từ đó suy ra $\widehat{zOy} = \widehat{MON_1}$.

36. (h. 42)

a) Tứ giác $HBMM'$ nội tiếp được do $\widehat{M'HB} = \widehat{M'MB} = 90^o$, suy ra

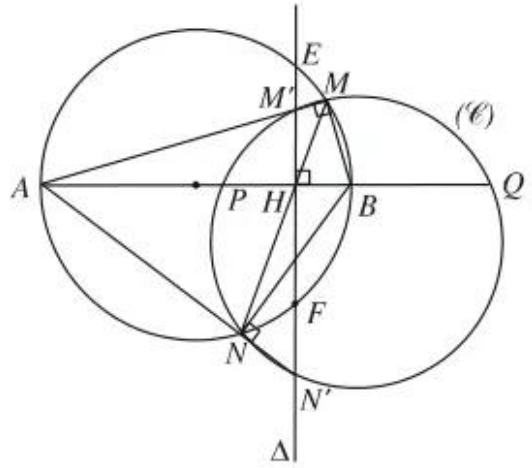
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}.$$

Tứ giác $HBN'N$ cũng nội tiếp được do $\widehat{N'HB} = \widehat{N'NB} = 90^o$, suy ra

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}.$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN'}$.

Suy ra M, N, M', N' cùng thuộc một đường tròn, ta kí hiệu đường tròn đó là $(\mathscr{C})$.



Hình 42

b) Gọi P, Q là các giao điểm của $(\mathscr{C})$ với đường thẳng AB và E, F là các giao điểm của Δ với đường tròn đường kính AB.

Khi đó $\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HP}.\overrightarrow{HQ}$ nên E, P, F, Q cùng thuộc đường tròn (S). Đường tròn này tiếp xúc với AE, AF lần lượt tại E, F và do AE, AF đối xứng qua AB nên (S) cố định, suy ra P, Q là hai điểm cố định.

Vậy P, Q thuộc đường tròn (S) tiếp xúc với AE, AF ở E, F.

Do (S) là đường tròn cố định nên P, Q là hai điểm cố định của $(\mathscr{C})$.

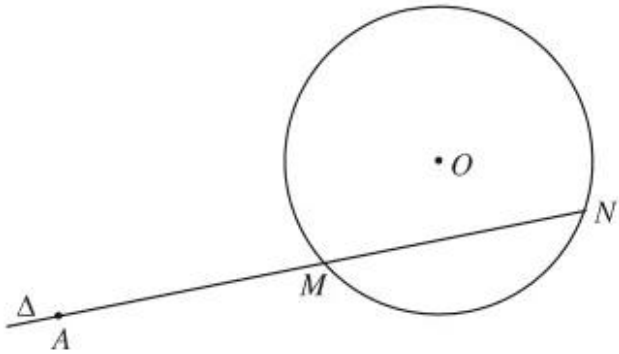
37. (h. 43)

• Nếu A ở ngoài đường tròn thì điều kiện $AM = MN$ tương đương với $AN = 2AM$. Ta lại có

$$AM.AN = d^2 - R^2 \ (d = OA).$$

Từ đó dẫn đến $2AM^2 = d^2 - R^2$

hay $$AM = \frac{\sqrt{2(d^2 - R^2)}}{2}.$$



Hình 43

Điểm M (nếu có) là một điểm chung của đường tròn $(O\ ;\ R)$ và đường tròn tâm A, bán kính bằng $\frac{\sqrt{2(d^2 - R^2)}}{2}$.

• Nếu A nằm trong đường tròn thì đường thẳng Δ cần tìm là :

– Đường thẳng vuông góc với OA ở A khi A không trùng với O.

– Đường kính bất kì của đường tròn khi A trùng với O.

38. (h. 44)

Ta có $AM = AN = AE$ (do M, N, E cùng thuộc đường tròn tâm A).

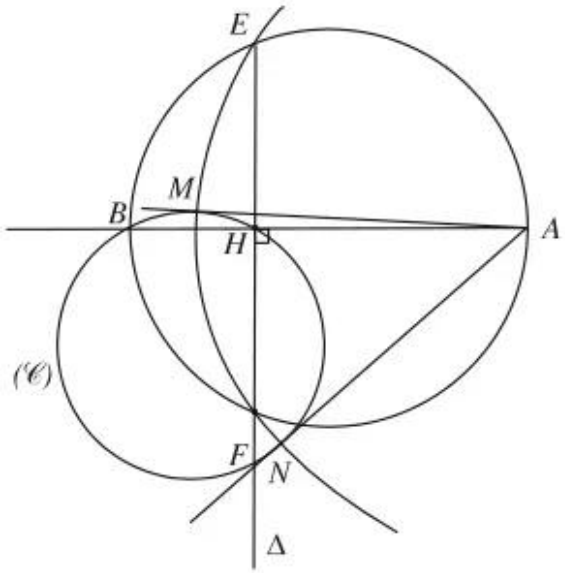
Trong tam giác vuông AEB, $EH \perp AB$ nên

$$AE^2 = AH.AB = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$$

Từ đó suy ra

$$AM^2 = AN^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}.$$

Vậy AM, AN là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ (xem bài 30 chương II).



Hình 44

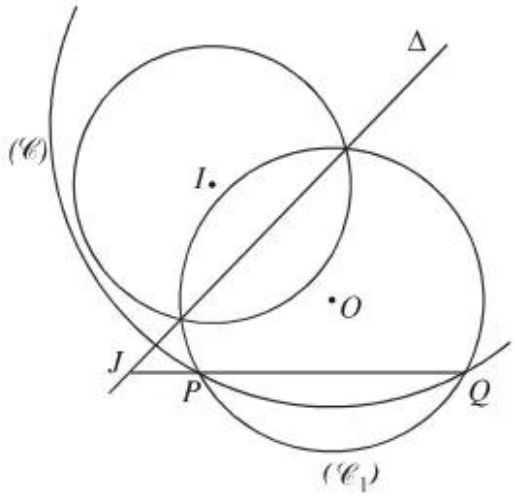
39. a) (h. 45)

Gọi $(\mathscr{C}_1)$ là đường tròn cố định có tâm O và đi qua P, Q. Do I không thuộc đường trung trực của PQ nên trục đẳng phương Δ của $(\mathscr{C}_1)$ và (I) không song song với PQ, chúng phải cắt nhau ở J.

Bây giờ giả sử $(\mathscr{C})$ là đường tròn bất kì đi qua P và Q, ta có J thuộc trục đẳng phương PQ của $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}_1)$ nên $\mathscr{P}_{J/(\mathscr{C})} = \mathscr{P}_{J/(\mathscr{C}_1)}$.

Lại do J thuộc trục đẳng phương của $(\mathscr{C}_1)$ và (I) nên

$$\mathscr{P}_{J/(\mathscr{C}_1)} = \mathscr{P}_{J/(I)}.$$



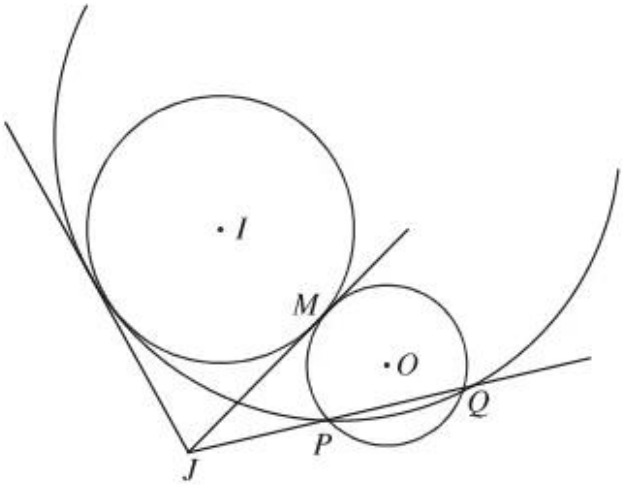
Hình 45

Từ đó ta có $\mathscr{P}_{J/(\mathscr{C})} = \mathscr{P}_{J/(I)}$, hay J thuộc trục đẳng phương của $(\mathscr{C})$ và (I).

b) (h. 46)

Kẻ tiếp tuyến JM với (I) (M là tiếp điểm), ta có $JM^2 = \mathscr{P}_{J/(I)}$.

Do $\mathscr{P}_{J/(I)} = \overrightarrow{JP}.\overrightarrow{JQ}$ nên đường tròn (MPQ) tiếp xúc với JM ở M và cũng tiếp xúc với (I) ở M. Từ đó suy ra cách dựng. Bài toán có hai nghiệm.



Hình 46

40. (h. 47)

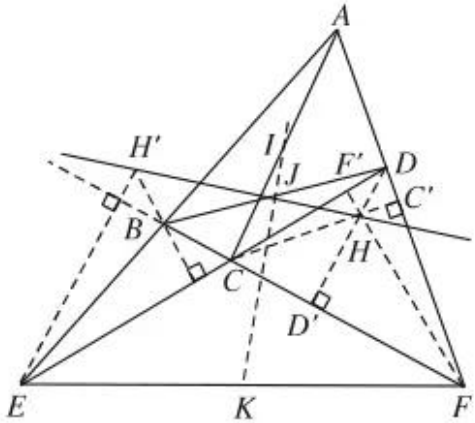
Kẻ các đường cao CC', DD', FF' của tam giác CDF và gọi H là trực tâm của tam giác đó thì $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$. (*)

Ta có trung điểm I của AC cũng là tâm đường tròn đường kính AC, đường tròn đó đi qua C' (do $\widehat{AC'C} = 90^o$).

Suy ra $\mathscr{P}_{H/(I)} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$.

Tương tự như vậy,

$\mathscr{P}_{H/(J)} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HD'}$ (J là tâm đường tròn đường kính BD).



Hình 47

$\mathscr{P}_{H/(K)} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HF'}$ (K là tâm đường tròn đường kính EF).

Kết hợp với (*) suy ra

$$\mathscr{P}_{H/(I)} = \mathscr{P}_{H/(J)} = \mathscr{P}_{H/(K)}.$$

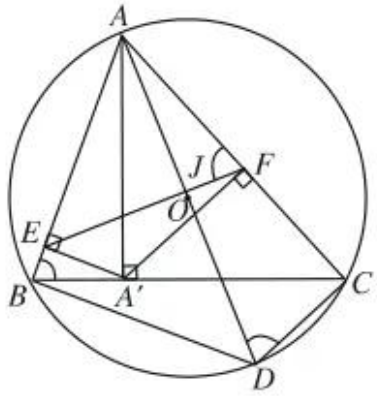
Nếu lấy trực tâm H' của tam giác BCE ta cũng sẽ có

$$\mathscr{P}_{H'/(I)} = \mathscr{P}_{H'/(J)} = \mathscr{P}_{H'/(K)}.$$

Vậy HH' là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (J), nên $HH' \perp IJ$.
HH' cũng là trục đẳng phương của (I) và (K), nên $HH' \perp IK$.
Từ đó ta có I, J, K thẳng hàng.

41. (h. 48)

a) Trong hai tam giác vuông $AA'B$ và $AA'C$ ta có $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = AA'^2$ và $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} = AA'^2$ nên $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$, suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp được, do đó ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ABC}$. Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) nên tứ giác $DCFJ$ nội tiếp được, suy ra $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$. Vậy $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = AA'^2$, do đó AA' là tiếp tuyến của đường tròn $(A'JD)$.



Hình 48

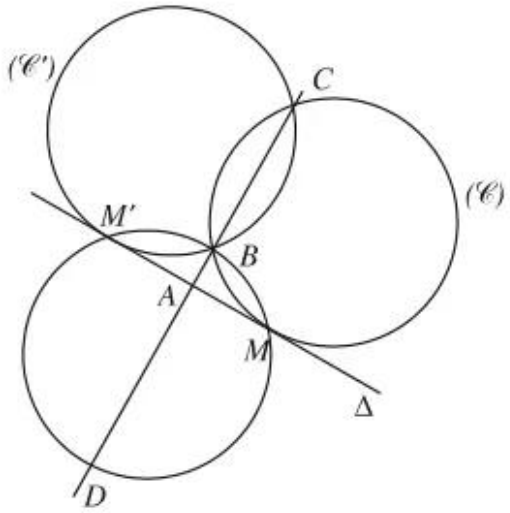
b) Ba điểm E, F, O thẳng hàng khi O trùng với J hay $AJ = R$.

Do $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = AA'^2$ nên $AJ = R$ nếu $AA'^2 = 2R^2$ hay $AA' = R\sqrt{2}$.

42. (h. 49)

a) Gọi M là tiếp điểm của Δ với đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua B và C, khi đó $AM^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC$ không đổi. Do đó M là giao điểm của Δ và đường tròn tâm A, bán kính bằng $\sqrt{AB.AC}$. Từ đó suy ra có hai đường tròn cùng đi qua B, C và cùng tiếp xúc với Δ.

b) Gọi M, M' là hai tiếp điểm của Δ với hai đường tròn ở câu a) và gọi D là giao điểm (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn (BMM') thì



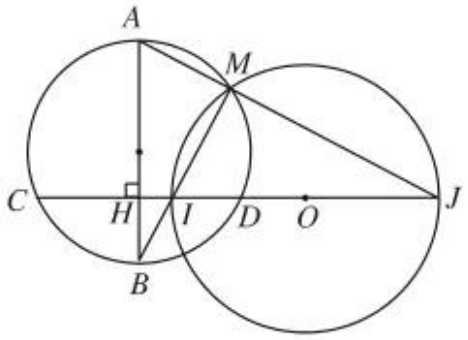
Hình 49

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} = -AM^2 = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}$ hay D là điểm đối xứng với C qua A, do đó D là điểm cố định. Vậy khi Δ quay quanh A, các đường tròn (BMM') luôn đi qua điểm D cố định khác B.

43. (h. 50) *Nhận xét*. Hai điểm I và J thuộc hai tia BM, AM ở về cùng một phía của đường thẳng AB, do đó đường tròn đi qua ba điểm M, I, J có đường kính IJ không cắt đường thẳng AB. Cũng có thể chứng minh như sau.

a) Ta có B là điểm chính giữa của cung CD (do $AB \perp CD$) và $MA \perp MB$ ($\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên MB và MA là phân giác trong và phân giác ngoài của góc CMD.



Hình 50

Từ đó suy ra : $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = -\dfrac{\overline{JC}}{\overline{JD}}$. (*)

Gọi H là giao điểm của AB và CD, O là tâm đường tròn (MIJ) thì H là trung điểm của CD và O là trung điểm của IJ.

Từ (*) suy ra $\overline{IC}.\overline{JD}+\overline{JC}.\overline{ID} = 0$ hay

$$(\overline{OC}-\overline{OI}).(\overline{OD}-\overline{OJ})+(\overline{OC}-\overline{OJ}).(\overline{OD}-\overline{OI}) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{OC}.\overline{OD}+\overline{OI}.\overline{OJ}-\overline{OC}.\overline{OJ}-\overline{OI}.\overline{OD}+$$

$$+\overline{OC}.\overline{OD}+\overline{OI}.\overline{OJ}-\overline{OD}.\overline{OJ}-\overline{OI}.\overline{OC} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\overline{OC}+\overline{OD}\right)\left(\overline{OI}+\overline{OJ}\right)+2\left(-\overline{OI}^2+\overline{OC}.\overline{OD}\right)=0.$$

Do $\overline{OI}+\overline{OJ} = 0$ nên $OI^2 = \overline{OC}.\overline{OD} < \left(\dfrac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}\right)^2$,

mà $\dfrac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2} = \overline{OH}$ nên $OI^2 < OH^2$ hay $OI < OH$. Vậy H và cả đường thẳng AB nằm ngoài đường tròn (MIJ). Từ đó suy ra, từ điểm P bất kì trên AB, kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (MIJ).

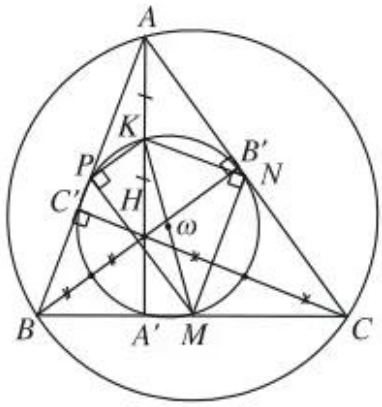
b) Ta có $AT^2 = AT'^2 = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AJ}$, mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ không đổi (do A, H, B cố định).

Vậy $AT^2 = AT'^2 = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$ không đổi, suy ra T và T' luôn thuộc đường tròn tâm A bán kính bằng $\sqrt{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}}$.

44. (h. 51)

Giả sử tam giác ABC có $AA' \perp BC$ và M, N là trung điểm của BC và AC.

Vẽ đường tròn (ω) đi qua A', M, N nếu A' khác M, hoặc (ω) đi qua N và tiếp xúc với BC tại M nếu A' trùng với M. Lấy giao điểm thứ hai B' của (ω) và AC.



Hình 51

Khi đó $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CN}.\overrightarrow{CB'}$

hay $\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB'}$,

suy ra $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CA}$.

Vậy bốn điểm B, A', B', A cùng thuộc một đường tròn. Trong đường tròn này $\widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90^o$, vậy (ω) đi qua chân đường cao B' hạ từ đỉnh B của tam giác ABC.

Đặt K là giao điểm thứ hai của (ω) với AA', ta có $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AN}$.

Ta lại có $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}$ (do $HB'CA'$ nội tiếp được).

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA'}$; do đó $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$. Vậy (ω) đi qua trung điểm K của AH.

Gọi P là trung điểm của AB, ta có $KP \parallel BB'$ và $MP \parallel AC$, suy ra $\widehat{KPM} = 90^o$. Tương tự cũng có $\widehat{KNM} = 90^o$ nên P nằm trên đường tròn (ω) đi qua M, N, K. Lí luận tương tự như trên ta được chân đường cao C' hạ từ đỉnh C và trung điểm các đoạn HB, HC đều thuộc đường tròn (ω).

45. $\vec{a}.\vec{b} = 1.(-3) + 2.1 = -1$; $\vec{b}.\vec{c} = 10$; $\vec{c}.\vec{a} = -8$;

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} = -9$;

$\vec{a}.(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} = 7$.

46. a) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{-2.4 + 3.1}{\sqrt{2^2 + 3^2}.\sqrt{4^2 + 1^2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{221}}$;

$\cos(\vec{a},\vec{i}) = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos(\vec{b},\vec{j}) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$;

$\vec{a} + \vec{b} = (2\,;4)$; $\vec{a} - \vec{b} = (-6\,;2)$;

$\cos(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = \dfrac{-4}{\sqrt{2^2+4^2}.\sqrt{6^2+2^2}} = -\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

b) $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} = (-2k + 4l\,;3k + l)$;

$\vec{c} \perp (\vec{a}+\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k+4l) + 4(3k+l) = 0$

$\Leftrightarrow 2k + 3l = 0.$

Vậy với $2k + 3l = 0$ thì $\vec{c} \perp (\vec{a}+\vec{b})$.

c) Giả sử $\vec{d} = (x;\,y)$. Khi đó từ $\vec{a}.\vec{d} = 4$ và $\vec{b}.\vec{d} = -2$, suy ra hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2. \end{cases}$$

$$ĐS : \vec{d} = \left(-\frac{5}{7}\,;\,\frac{6}{7}\right).$$

47. a) Giả sử $M(x\,;0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AM}(x+3\,;-2)$; $\overrightarrow{BM}(x-4\,;-3)$;

Tam giác MAB vuông tại M khi $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ hay $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Từ đó ta có $(x+3).(x-4) + (-2).(-3) = 0$ hay $x^2 - x - 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3, x_2 = -2$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1 = (3\,;0)$; $M_2 = (-2\,;0)$.

b) Giả sử $N(0\,;y) \in Oy$. Khi đó

$NA^2 = NB^2$

$\Leftrightarrow (0+3)^2 + (y-2)^2 = (0-4)^2 + (y-3)^2$

$\Leftrightarrow 9 + y^2 - 4y + 4 = 16 + y^2 - 6y + 9$

$\Leftrightarrow y = 6$. Vậy $N = (0\,;6)$.

48. a) $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (1-1)^2} = 4.$

$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}.$

$AC = \sqrt{(2+1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}.$

Chu vi tam giác ABC bằng $4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (4;0)$, $\overrightarrow{AC} = (3;3)$ nên

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{12}{4.3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, suy ra $\widehat{BAC} = 45^o$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 45^o = \dfrac{1}{2}.4.3\sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 6$.

b) Gọi $H(x_1 ; y_1)$ là trực tâm tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$. Từ đó dẫn đến $\begin{cases} x_1 - 2 = 0 \\ x_1 + y_1 - 4 = 0, \end{cases}$

suy ra $H = (2 ; 2)$.

Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-1+3+2}{3} = \dfrac{4}{3} \\ y_G = \dfrac{1+1+4}{3} = 2. \end{cases}$$

Giả sử $I(x_2 ; y_2)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$.

Từ $IA = IB$ suy ra $(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 1)^2$. (1)

Từ $IA = IC$ suy ra $(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = (x_2 - 2)^2 + (y_2 - 4)^2$. (2)

Từ (1) ta có $x_2 = 1$, thay vào (2) được $y_2 = 2$. Vậy $I = (1 ; 2)$.

Như vậy $\overrightarrow{IH} = (1;0)$, $\overrightarrow{IG} = \left(\dfrac{1}{3};0\right)$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

49. $\overrightarrow{AB} = (8 ; 4)$; $\overrightarrow{AD} = (5 ; -5)$; $\overrightarrow{CB} = (-2 ; 4)$; $\overrightarrow{CD} = (-5 ; -5)$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{8.5 + 4.(-5)}{\sqrt{8^2 + 4^2}.\sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) = \frac{(-2).(-5) + 4.(-5)}{\sqrt{2^2 + 4^2}.\sqrt{5^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^o.$$

Vậy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

50. Gọi $C = (x\ ;\ y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (2\ ;\ 1)$; $\overrightarrow{BC} = (x - 3\ ;\ y)$. Từ $ABCD$ là hình vuông, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3) + 1.y = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $C_1(4\ ;\ -2)$, ta tính được đỉnh $D_1(2\ ;\ -3)$.

Với $C_2(2\ ;\ 2)$, ta tính được đỉnh $D_2(0\ ;\ 1)$.