§2. Tích vô hướng của hai vectơ

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ và các tính chất.

2. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng :

Nếu $\vec{u} = (x\,;y)$, $\vec{v} = (x'\,;y')$ *thì* $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

3. Độ dài của vectơ và góc giữa hai vectơ : Nếu $\vec{u}(x;y), \vec{v} = (x';y')$ thì

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}} \text{ (với } \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}).$$

II – ĐỀ BÀI

9. Tam giác ABC vuông ở A và có hai cạnh $AB = 7$, $AC = 10$.

a) Tìm côsin của các góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right)$;

b) Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Tính $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

10. Cho tam giác ABC có $AB = 7$, $AC = 5$, $\widehat{A} = 120^{\circ}$.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

b) Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác (M là trung điểm của BC).

11. Tam giác MNP có $MN = 4$, $MP = 8$, $\widehat{M} = 60^{\circ}$. Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

12. Tam giác ABC có các cạnh $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$ và AD là phân giác của góc BAC (D thuộc cạnh BC).

a) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AD}$ qua hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính độ dài đoạn AD.

13. Chứng minh công thức sau (với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì) :

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right).$$

14. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC.

15. Tính độ dài các đường phân giác trong và phân giác ngoài của một tam giác theo độ dài ba cạnh của tam giác đó.

16. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$. Trong trường hợp nào đẳng thức sau đây đúng : $(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}.\vec{c})$?

17. Cho hai điểm cố định A, B có khoảng cách bằng a.

a) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

b) Tìm tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2$.

18. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng Δ, H là hình chiếu của A trên Δ. Với mỗi điểm M trên Δ, lấy điểm N trên tia AM sao cho $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = AH^2$. Tìm tập hợp các điểm N.

19. Cho đa giác đều $A_1A_2... A_n$ nội tiếp trong đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một điểm M thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng :

a) $\cos\widehat{MOA_1} + \cos\widehat{MOA_2} + ... + \cos\widehat{MOA_n} = 0$;

b) $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2$ có giá trị không đổi.

20. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Tính độ dài đoạn thẳng AM. Xét trường hợp đặc biệt khi $k = \frac{1}{2}$.

21. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Đặt

$$\vec{u} = \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{BC}.$$

Chứng minh rằng

a) $\vec{u} = -abc\left(\cos B\frac{\overrightarrow{CA}}{b} + \cos C\frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \cos A\frac{\overrightarrow{BC}}{a}\right)$;

b) Nếu ABC là tam giác đều thì $\vec{u} = \vec{0}$;

c) Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ thì ABC là tam giác đều.

22. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M. Gọi P là trung điểm đoạn thẳng AD. Chứng minh rằng : $MP \perp BC$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

23. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

24. Cho AA' là một dây cung của đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên dây cung đó. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} = MA(MA - MA')$.

25. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M sao cho các góc AMB, BMC, CMA đều bằng 120°. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt đường tròn (O) lần lượt tại A', B' và C'. Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC = MA' + MB' + MC'.$$

26. Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ với $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$ $(k \neq 0)$.

a) Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm G sao cho

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

b) Tìm quỹ tích những điểm M sao cho : $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2 = m$, trong đó m là một số không đổi.

27. Cho tam giác ABC không vuông.

a) Gọi AA' là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh

$$(\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C} = \vec{0}.$$

b) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh

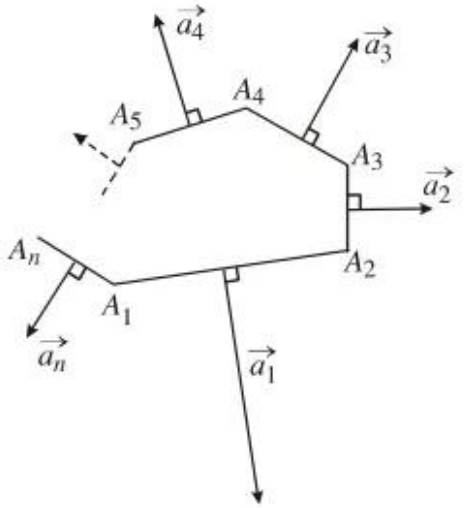
$$(\tan A)\overrightarrow{HA} + (\tan B)\overrightarrow{HB} + (\tan C)\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

28. Cho một điểm O bất kì nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Gọi B_1, B_2, B_3 lần lượt là hình chiếu của O trên A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. Đặt

$$\overrightarrow{a_1} = A_1A_2\frac{\overrightarrow{OB_1}}{OB_1},$$

$$\overrightarrow{a_2} = A_2A_3\frac{\overrightarrow{OB_2}}{OB_2},$$

$$\overrightarrow{a_3} = A_3A_1\frac{\overrightarrow{OB_3}}{OB_3}.$$



Hình 23

Chứng minh rằng $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$.

Chú ý. Kết quả trên đúng với đa giác $A_1A_2...A_n$ bất kì (*định lí Con Nhím*). Trên hình 23, $\left|\overrightarrow{a_k}\right| = A_kA_{k+1}$ (xem $A_{n+1} \equiv A_1$), $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ (các vectơ $\overrightarrow{a_k}$ được gọi là các "*lông nhím*").

29. Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau ở điểm M. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}.$$

30. Cho đường thẳng AB cắt đường thẳng Δ ở M và một điểm C trên Δ (C khác M). Chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (ABC) khi và chỉ khi $MC^2 = MA.MB$.

31. Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O\,;R)$ và $(O'\,;R')$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\mathscr{P}_{M/(O,R)} = \mathscr{P}_{M/(O',R')}$.

32. Trong đường tròn $\mathscr{C}(O\,;R)$ cho hai dây cung AA', BB' vuông góc với nhau ở điểm S và gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $SM \perp A'B'$.

33. Cho điểm P cố định nằm trong đường tròn $(O\,;R)$ và hai điểm A, B chạy trên đường tròn đó sao cho góc APB luôn bằng 90°. Gọi M là trung điểm của dây AB và H là hình chiếu của P xuống AB. Chứng minh rằng M, H luôn cùng thuộc một đường tròn cố định.

34. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và (J) là đường tròn bàng tiếp góc A(*) của tam giác. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn đó đi qua trung điểm của cạnh BC.

35. Cho điểm M nằm trong góc $\widehat{xOy}$ và gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy.

a) Vẽ đường tròn $(\mathscr{C})$ qua M_1, M_2, đường tròn này cắt hai cạnh Ox, Oy lần lượt ở N_1, N_2. Kẻ đường thẳng vuông góc với Ox ở N_1 và đường thẳng vuông góc với Oy ở N_2, giả sử hai đường thẳng đó cắt nhau ở N. Chứng minh $ON \perp M_1M_2$.

b) Chứng minh rằng khi $(\mathscr{C})$ thay đổi nhưng vẫn đi qua M_1 và M_2 thì điểm N luôn thuộc một tia Oz cố định và $\widehat{zOy} = \widehat{MON_1}$.

(*) Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và với phần kéo dài của các cạnh AB, AC. Tâm của đường tròn này chính là điểm đồng quy của đường phân giác trong của góc A và các đường phân giác ngoài của góc B và C.

36. Cho đường tròn đường kính AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB ở H. (H không trùng với A và B). Một đường thẳng quay quanh H cắt đường tròn ở M, N và các đường thẳng AM, AN lần lượt cắt Δ ở M', N'.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M', N' cùng thuộc một đường tròn $(\mathscr{C})$ nào đó.

b) Chứng minh rằng các đường tròn $(\mathscr{C})$ luôn đi qua hai điểm cố định.

37. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và điểm A không thuộc đường tròn đó. Đường thẳng Δ quay quanh A cắt $(O\ ;\ R)$ ở M và N. Xác định vị trí của Δ để một trong ba điểm A, M, N cách đều hai điểm kia.

38. Cho đường tròn đường kính AB, H là điểm nằm giữa AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB tại H. Gọi E, F là giao điểm của đường tròn và Δ. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AE và đường tròn $(\mathscr{C})$ bất kì qua H, B. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau ở M và N, chứng minh rằng AM và AN là hai tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$.

39. Cho hai điểm P, Q nằm ngoài đường tròn (I) cố định với $IP \neq IQ$.

a) Vẽ đường tròn $(\mathscr{C})$ bất kì đi qua P, Q. Chứng minh rằng trục đẳng phương của $(\mathscr{C})$ và (I) đi qua một điểm cố định.

b) Hãy nêu cách vẽ đường tròn đi qua P, Q và tiếp xúc với đường tròn (I).

40. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh AB, CD kéo dài cắt nhau ở E và các cạnh AD, BC kéo dài cắt nhau ở F. Chứng minh rằng các trung điểm của các đoạn AC, BD và EF cùng thuộc một đường thẳng (*đường thẳng Gao-xơ của tứ giác*).

41. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(O\ ;\ R)$, có đường cao AA'. Gọi E, F tương ứng là hình chiếu của A' trên AB, AC và J là giao điểm của EF với đường kính AD.

a) Chứng minh rằng AA' là tiếp tuyến của đường tròn $(A'JD)$.

b) Tìm điều kiện của AA' để ba điểm E, F, O thẳng hàng.

42. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, B ở giữa A, C và đường thẳng Δ qua A.

a) Chứng minh rằng có hai đường tròn cùng đi qua B, C và cùng tiếp xúc với Δ.

b) Chứng minh rằng khi Δ quay quanh A, các đường tròn đi qua B và hai tiếp điểm của Δ với hai đường tròn ở câu a) luôn đi qua một điểm cố định khác B.

43. Cho đường tròn đường kính AB có dây cung CD vuông góc với AB. Với mỗi điểm M chạy trên đường tròn đó (khác với C và D), kẻ các đường thẳng AM, BM lần lượt cắt đường thẳng CD ở J và I.

a) Chứng minh rằng từ điểm P bất kì cố định trên đường thẳng AB, có thể kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn (MIJ).

b) Kẻ các tiếp tuyến AT, AT' đến đường tròn (MIJ) (T, T' là các tiếp điểm). Chứng minh rằng T, T' luôn thuộc một đường tròn cố định.

44. Chứng minh rằng : Trong tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao cùng thuộc một đường tròn (ω) và đường tròn (ω) cũng đi qua trung điểm của các đoạn thẳng nối mỗi đỉnh với trực tâm tam giác *(đường tròn chín điểm* hay *đường tròn Ơ-le* của tam giác).

45. Trong mặt phẳng toạ độ cho $\vec{a} = (1\,;2)$; $\vec{b} = (-3\,;1)$; $\vec{c} = (-4\,;-2)$.

Tính $\vec{a}.\vec{b}$; $\vec{b}.\vec{c}$; $\vec{c}.\vec{a}$; $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$; $\vec{a}.(\vec{b}-\vec{c})$.

46. Cho các vectơ $\vec{a}(-2\,;3)$, $\vec{b}(4\,;1)$.

a) Tính côsin của góc giữa mỗi cặp vectơ sau :

$\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{a}$ và $\vec{i}$; $\vec{b}$ và $\vec{j}$; $\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-\vec{b}$;

b) Tìm các số k và l sao cho vectơ $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}+\vec{b}$.

c) Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d} = 4$ và $\vec{b}.\vec{d} = -2$.

47. Cho hai điểm $A(-3\,;2)$ và $B(4\,;3)$. Tìm toạ độ của

a) Điểm M trên trục Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M.

b) Điểm N trên trục Oy sao cho $NA = NB$.

48. Cho ba điểm $A(-1\,;1)$ và $B(3\,;1)$, $C(2\,;4)$.

a) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC ;

b) Tìm toạ độ trực tâm H, trọng tâm G và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Hãy kiểm nghiệm lại hệ thức $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

49. Cho bốn điểm $A(-8 ; 0)$, $B(0 ; 4)$, $C(2 ; 0)$, $D(-3 ; -5)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

50. Biết $A(1 ; -1)$ và $B(3 ; 0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm toạ độ các đỉnh C và D.